

P.S. W.  
1909.

LIBRARY  
MICHIGAN STATE NORMAL

N 8.

ANNALEN  
DER  
PHYSIK.

BERGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANX, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 29. HEFT 3.

DER GANZEN REIHE 334. BANDES 3. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,  
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.



LEIPZIG, 1909.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

DÖRRIENSTRASSE 16.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 15 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 45 M.

(Ausgegeben am 10. Juni 1909.)

# In h a l t.

	Seite
1. Fritz Reiche. Über die anomale Fortpflanzung von Kugelwellen beim Durchgang durch Brennpunkte. Zweite Mitteilung	401
2. F. Henning. Die Verdampfungswärme des Wassers zwischen 100 und 180° C. . . . .	441
3. Franz Koláček. Phänomenologisches über Dispersion und Zeeman-Effekt . . . . .	466
4. Ludwig Silberstein. Weiteres zur Kritik der Elektronentheorie. . . . .	523
5. E. Dorn und W. Lohmann. Bestimmung der optischen Konstanten einiger flüssiger Kristalle . . . . .	533
6. K. Bädeker. Über eine eigentümliche Form elektrischen Leitvermögens bei festen Körpern . . . . .	566
7. A. L. Bernoulli. Eine neue Methode zur Bestimmung der Dispersion von Metallen . . . . .	585
8 Stanisław Loria. Über die Dispersion des Lichtes in gasförmigen Kohlenwasserstoffen . . . . .	605
9. A. Wörmann. Berichtigung zu der Mitteilung: „Die Temperaturkoeffizienten der elektrischen Leitfähigkeit einiger Säuren und Basen in wässriger Lösung“ . . . . .	623

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geb. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Würzburg, Pleicherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuziehen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

**Zitate** sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahresszahl aufzuführen.

te  
1  
1  
6  
3  
3  
36  
5  
5  
23  
  
n  
n  
ne  
in  
u  
it  
ea  
en  
n  
  
d  
st  
et.  
en  
u  
en  
au  
  
ea  
en  
s,

Fort  
punk  
perit  
mit  
keine  
oder  
Feld  
Kom  
der  
Vor  
Vek  
farn  
Kug

nind  
dies  
dem  
jede  
seul  
radi  
dan

## ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 29.

1. Über die anomale Fortpflanzung  
von Kugelwellen beim Durchgang durch  
Brennpunkte;  
von Fritz Reiche.

Zweite Mitteilung.

## Einleitung.

In dem ersten Teil meiner Arbeit „Über die anomale Fortpflanzung von Kugelwellen beim Durchgang durch Brennpunkte“<sup>1)</sup> war ich zu dem Resultate gekommen, daß die Experimente, insbesondere der von Sagnac angestellte Versuch mit einer Kalkspatlinse, infolge des Einflusses der Beugung, keinen eindeutigen Schluß auf das Verhalten des Lichtvektors oder, besser gesagt, der Vektoren des elektromagnetischen Feldes im Brennpunkte zulassen. Dies Resultat war durch Kombination der Maxwell'schen Gleichungen mit der Theorie der Beugung von Kugelwellen gewonnen worden, unter der Voraussetzung, daß bei Vernachlässigung der Beugung die Vektoren des elektromagnetischen Feldes nur von der Entfernung  $r$  vom Brennpunkt abhängen und die Form *reiner* Kugelwellenfunktionen besitzen, daß also  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  von der Form

$$\frac{1}{r} f\left(t + \frac{r}{c}\right) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

seien. Es war dort schon darauf hingewiesen worden, daß diese Lösung der Maxwell'schen Gleichungen die Frage nach dem Ursprung der Wellen ganz außer acht läßt, und daß an jeder Stelle des elektromagnetischen Feldes die Energie *genau* senkrecht durch die kugelförmigen Wellenflächen, also in radialer Richtung, strömt. Die Amplitude von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  ist dann auf einer bestimmten Kugelfläche um den Brennpunkt

1) F. Reiche, Ann. d. Phys. 29. p. 65. 1909.

*konstant*, und im Brennpunkte selbst wird der eine Vektor jedenfalls unendlich, während der andere endlich bleibt.

Es ergaben sich in diesem Falle *zwei* mögliche Lösungen, so daß man, ganz abgesehen von den Experimenten, die sich als unzulänglich erwiesen, auch aus der Theorie keinen eindeutigen Schluß auf das Verhalten der elektromagnetischen Vektoren im Brennpunkte ziehen konnte. Soll daher die Theorie das Verhalten der elektromagnetischen Vektoren im Brennpunkt eindeutig festlegen, so muß man über den *Ursprung* der Lichtwellen eine bestimmte Vorstellung einführen, d. h. man muß, um die Verhältnisse in der Nachbarschaft des Brennpunktes zu erkennen, die Ideen über die *Natur der Lichtquelle* fixieren. Das Nächstliegende ist ohne Zweifel, zu der bekannten „Theorie des leuchtenden Punktes“ zu greifen, d. h. als Lichtquelle einen kleinen elektrischen Dipol mit periodisch veränderlichem Moment oder ein um eine Gleichgewichtslage schwingendes Elektron einzuführen. Das Feld eines solchen Oszillators ist annähernd dargestellt durch die bekannte Hertz-sche Lösung der Maxwell'schen Gleichungen.

Wir wollen den folgenden Betrachtungen diese Lösung zugrunde legen und den Einfluß der Beugung und Brechung durch eine Linse auf die von einem solchen „leuchtenden Punkt“ ausgesandten Wellen untersuchen. Der Gang der Untersuchung ist dem in Teil I eingeschlagenen analog.

### § 1.

Bezeichnen  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  die elektrische und magnetische Feldintensität, so sind die Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = c \cdot \text{curl } \mathfrak{H}, \\ \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -c \cdot \text{curl } \mathfrak{E}, \end{cases}$$

wo  $c = 3 \cdot 10^{10}$  cm/sec die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist.

Die Hertz'sche Lösung dieser Gleichungen ist die folgende:

Bezeichnet  $F$  eine Funktion der Zeit  $t$  und der drei Koordinaten  $x, y, z$ , die der Differentialgleichung

$$(2) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 \Delta F = c^2 \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right)$$

genügt, so sind die Komponenten von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  durch folgende Ausdrücke dargestellt:

$$(3) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}, & \mathfrak{H}_x = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial t}, \\ \mathfrak{E}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}, & \mathfrak{H}_y = -\frac{1}{c} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}, \\ \mathfrak{E}_z = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, & \mathfrak{H}_z = 0. \end{cases}$$

Führen wir nun Raumpolarkoordinaten ein durch die Beziehungen:

$$(4) \quad \begin{cases} x = r \cos \omega \sin \vartheta, \\ y = r \sin \omega \sin \vartheta, \\ z = r \cos \vartheta \end{cases}$$

und nehmen an, daß  $F$  nur von  $r$  abhängt, so wird die Gleichung (2) folgende Gestalt annehmen:

$$(5) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r} \cdot \frac{\partial^2 (r F)}{\partial r^2}.$$

Die Gleichungen (3) werden:

$$(6) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) \cos \omega \sin \vartheta \cos \vartheta, \\ \mathfrak{E}_y = \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) \sin \omega \sin \vartheta \cos \vartheta, \\ \mathfrak{E}_z = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \sin^2 \vartheta + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} (1 - 3 \cos^2 \vartheta), \\ \mathfrak{H}_x = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial t} \sin \omega \sin \vartheta, \\ \mathfrak{H}_y = -\frac{1}{c} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial t} \cos \omega \sin \vartheta, \\ \mathfrak{H}_z = 0. \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung von (5) ist nun:

$$(7) \quad F = \frac{\varphi \left( t - \frac{r}{c} \right) + \psi \left( t + \frac{r}{c} \right)}{r},$$

d. h. wir erhalten die Übereinanderlagerung einer nach außen und einer nach innen laufenden Welle.  $\varphi$  und  $\psi$  sind will-

kürliche Funktionen. Durch Einsetzen von (7) in (6) erhält man nun die Feldkomponenten in folgender Form:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_x = \left\{ \frac{1}{c^2 r} \varphi'' \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{3}{c r^2} \varphi' \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{3}{r^3} \varphi \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\} \\ \qquad \cos \omega \sin \vartheta \cos \vartheta \\ \qquad + \left\{ \frac{1}{c^2 r} \psi'' \left( t + \frac{r}{c} \right) - \frac{3}{c r^2} \psi' \left( t + \frac{r}{c} \right) + \frac{3}{r^3} \psi \left( t + \frac{r}{c} \right) \right\} \\ \qquad \cos \omega \sin \vartheta \cos \vartheta, \\ \\ \mathfrak{E}_y = \left\{ \frac{1}{c^2 r} \varphi'' \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{3}{c r^2} \varphi' \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{3}{r^3} \varphi \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\} \\ \qquad \sin \omega \sin \vartheta \cos \vartheta \\ \qquad + \left\{ \frac{1}{c^2 r} \psi'' \left( t + \frac{r}{c} \right) - \frac{3}{c r^2} \psi' \left( t + \frac{r}{c} \right) + \frac{3}{r^3} \psi \left( t + \frac{r}{c} \right) \right\} \\ \qquad \sin \omega \sin \vartheta \cos \vartheta, \\ \\ \mathfrak{E}_z = - \frac{1}{c^2 r} \varphi'' \left( t - \frac{r}{c} \right) \sin^2 \vartheta \\ \qquad - \left\{ \frac{1}{c r^2} \varphi' \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r^3} \varphi \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\} (1 - 3 \cos^2 \vartheta) \\ \qquad - \frac{1}{c^2 r} \psi'' \left( t + \frac{r}{c} \right) \sin^2 \vartheta \\ \qquad + \left\{ \frac{1}{c r^2} \psi' \left( t + \frac{r}{c} \right) - \frac{1}{r^3} \psi \left( t + \frac{r}{c} \right) \right\} (1 - 3 \cos^2 \vartheta), \\ \\ \mathfrak{H}_x = \left\{ - \frac{1}{c^2 r} \varphi'' \left( t - \frac{r}{c} \right) - \frac{1}{c r^2} \varphi' \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\} \sin \omega \sin \vartheta \\ \qquad + \left\{ \frac{1}{c^2 r} \psi'' \left( t + \frac{r}{c} \right) - \frac{1}{c r^2} \psi' \left( t + \frac{r}{c} \right) \right\} \sin \omega \sin \vartheta, \\ \\ \mathfrak{H}_y = \left\{ + \frac{1}{c^2 r} \varphi'' \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{c r^2} \varphi' \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\} \cos \omega \sin \vartheta \\ \qquad - \left\{ \frac{1}{c^2 r} \psi'' \left( t + \frac{r}{c} \right) - \frac{1}{c r^2} \psi' \left( t + \frac{r}{c} \right) \right\} \cos \omega \sin \vartheta, \\ \\ \mathfrak{H}_z = 0. \end{array} \right.$$

Der Nullpunkt unseres Koordinatensystems sei der Brennpunkt, nach dem die durch die Funktion  $\psi$  bestimmten Wellen

hinaufen; als divergierende, durch  $\varphi$  bestimmte Wellen verlassen sie den Brennpunkt und gehen ins Unendliche hinaus. Zwischen den beiden Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  besteht eine Beziehung, die wir am besten durch die Betrachtung der magnetischen Energie der Wellen ableiten. Die magnetische Energie der Wellen, die in einer Kugel vom Radius  $R$  um den Nullpunkt enthalten ist, hat den Wert

$$(9) \quad E_m = \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{H}^2 d\tau = \frac{1}{8\pi} \int [\mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{H}_y^2 + \mathfrak{H}_z^2] d\tau.$$

Dabei ist  $d\tau$  das Volumelement der Kugel und die Integration ist über das Innere der Kugel zu erstrecken. Aus (8) folgt:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{H}^2 = \left( \varphi' + \frac{r}{c} \varphi'' \right)^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{c^2 r^4} + \left( \psi' - \frac{r}{c} \psi'' \right)^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{c^2 r^4} \\ \quad + 2 \left( \varphi' + \frac{r}{c} \varphi'' \right) \left( \psi' - \frac{r}{c} \psi'' \right) \frac{\sin^2 \vartheta}{c^2 r^4} \\ = \frac{\sin^2 \vartheta}{c^2 r^4} \left\{ \varphi' + \frac{r}{c} \varphi'' + \psi' - \frac{r}{c} \psi'' \right\}^2. \end{array} \right.$$

Ferner ist

$$d\tau = r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\omega.$$

Daher

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{8\pi c^2} \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta \int_0^R \frac{dr}{r^3} \left( \varphi' + \frac{r}{c} \varphi'' + \psi' - \frac{r}{c} \psi'' \right)^2 \\ &= \frac{1}{3c^2} \int_0^R \frac{dr}{r^3} \left( \varphi' + \frac{r}{c} \varphi'' + \psi' - \frac{r}{c} \psi'' \right)^2. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\frac{\varphi'}{r^2} + \frac{\varphi''}{cr} = - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\varphi'}{r} \right)$$

und

$$\frac{\psi'}{r^2} - \frac{\psi''}{cr} = - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\psi'}{r} \right),$$

wobei immer zu beachten ist, daß das Argument von  $\varphi'$  und  $\varphi''$  ( $t - r/c$ ), das von  $\psi'$  und  $\psi''$  dagegen ( $t + r/c$ ) ist.

So kann man daher  $E_m$  schreiben wie folgt:

$$\begin{aligned}
 E_m &= -\frac{1}{3c^2} \int_0^R dr \left( \varphi' + \frac{r}{c} \varphi'' + \psi' - \frac{r}{c} \psi'' \right) \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\varphi' + \psi'}{r} \right) \\
 &= -\frac{1}{3c^2} \left[ \frac{\varphi' + \psi'}{r} \left( \varphi' + \frac{r}{c} \varphi'' + \psi' - \frac{r}{c} \psi'' \right) \right]_0^R \\
 &\quad + \frac{1}{3c^2} \int_0^R \frac{\varphi' + \psi'}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \varphi' + \frac{r}{c} \varphi'' + \psi' - \frac{r}{c} \psi'' \right) dr \\
 &= -\frac{1}{3c^2} \frac{\varphi' \left( t - \frac{R}{c} \right) + \psi' \left( t + \frac{R}{c} \right)}{R} \left[ \varphi' \left( t - \frac{R}{c} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{R}{c} \varphi'' \left( t - \frac{R}{c} \right) + \psi' \left( t + \frac{R}{c} \right) - \frac{R}{c} \psi'' \left( t + \frac{R}{c} \right) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{3c^2} \left\{ \left[ \frac{\varphi' \left( t - \frac{r}{c} \right) + \psi' \left( t + \frac{r}{c} \right)}{r} \right] \right\}_{r=0}^R \\
 &\quad - \frac{1}{3c^2} \int_0^R dr (\varphi' + \psi') (\varphi''' + \psi''').
 \end{aligned}$$

Das erste und letzte Glied dieses Ausdruckes sind ohne Zweifel endlich. Dagegen wird das zweite Glied im allgemeinen unendlich. Da nun die in einem endlichen Gebiet enthaltene magnetische Energie des Feldes einen endlichen Wert haben muß, so ist man gezwungen  $\psi$  derart zu wählen, daß das zweite Glied von  $E_m$  endlich bleibt. Es muß daher für alle Zeiten  $t$  die Beziehung bestehen

$$(11) \qquad \psi(t) = -\varphi(t).$$

Dann und nur dann hat in der Tat das zweite Glied von  $E_m$  einen endlichen Wert, und zwar den Wert 0.

Mit Rücksicht auf Gleichung (11) erhalten wir nun die Feldkomponenten nach (8) in der definitiven Form:

$$\begin{aligned}
 (12) \quad & \mathfrak{E}_x = \left\{ \frac{1}{c^2 r} \varphi'' \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{3}{c r^2} \varphi' \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{3}{r^3} \varphi \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\} \\
 & \quad \cos \omega \sin \vartheta \cos \vartheta \\
 & + \left\{ -\frac{1}{c^2 r} \varphi'' \left( t + \frac{r}{c} \right) + \frac{3}{c r^2} \varphi' \left( t + \frac{r}{c} \right) - \frac{3}{r^3} \varphi \left( t + \frac{r}{c} \right) \right\} \\
 & \quad \cos \omega \sin \vartheta \cos \vartheta, \\
 & \mathfrak{E}_y = \left\{ \frac{1}{c^2 r} \varphi'' \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{3}{c r^2} \varphi' \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{3}{r^3} \varphi \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\} \\
 & \quad \sin \omega \sin \vartheta \cos \vartheta \\
 & + \left\{ -\frac{1}{c^2 r} \varphi'' \left( t + \frac{r}{c} \right) + \frac{3}{c r^2} \varphi' \left( t + \frac{r}{c} \right) - \frac{3}{r^3} \varphi \left( t + \frac{r}{c} \right) \right\} \\
 & \quad \sin \omega \sin \vartheta \cos \vartheta, \\
 & \mathfrak{E}_z = -\frac{1}{c^2 r} \varphi'' \left( t - \frac{r}{c} \right) \sin^2 \vartheta \\
 & - \left\{ \frac{1}{c r^2} \varphi' \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r^3} \varphi \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\} (1 - 3 \cos^2 \vartheta) \\
 & + \frac{1}{c^2 r} \varphi'' \left( t + \frac{r}{c} \right) \sin^2 \vartheta \\
 & + \left\{ -\frac{1}{c r^2} \varphi' \left( t + \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r^3} \varphi \left( t + \frac{r}{c} \right) \right\} (1 - 3 \cos^2 \vartheta), \\
 & \mathfrak{H}_x = \left\{ -\frac{1}{c^2 r} \varphi'' \left( t - \frac{r}{c} \right) - \frac{1}{c r^2} \varphi' \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\} \sin \omega \sin \vartheta \\
 & + \left\{ -\frac{1}{c^2 r} \varphi'' \left( t + \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{c r^2} \varphi' \left( t + \frac{r}{c} \right) \right\} \sin \omega \sin \vartheta, \\
 & \mathfrak{H}_y = \left\{ \frac{1}{c^2 r} \varphi'' \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{c r^2} \varphi' \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\} \cos \omega \sin \vartheta \\
 & + \left\{ \frac{1}{c^2 r} \varphi'' \left( t + \frac{r}{c} \right) - \frac{1}{c r^2} \varphi' \left( t + \frac{r}{c} \right) \right\} \cos \omega \sin \vartheta, \\
 & \mathfrak{H}_z = 0.
 \end{aligned}$$

Es erübrigt sich, die Eigenschaften des durch diese Gleichungen dargestellten Feldes allgemein zu diskutieren; sie sind hinreichend bekannt. Nur auf einige wesentliche Punkte sei hingewiesen:

Wir werden im folgenden nur periodische Lösungen betrachten, also z. B.  $\varphi(t) = A \cos 2 \pi \frac{t}{T}$  setzen.

Man kann die durch (12) dargestellten Wellen Kugelwellen nennen, insofern die Flächen *gleicher Phase* die Flächen  $r = \text{const.}$  sind, d. h. Kugelflächen um den Nullpunkt.

Dagegen ist die Amplitude sowohl von  $E$  als von  $H$  auf einer bestimmten dieser Kugeln *keine Konstante*, sondern von der „Polarabstand“  $\vartheta$  abhängig. So ist z. B. für  $\vartheta = 0$  und  $\vartheta = \pi$  das ganze Feld  $= 0$ , während es nach dem Äquator ( $\vartheta = \pi/2$ ) hin zunimmt. Es macht sich also auch im Felde, das den Brennpunkt umgibt, dieselbe Einseitigkeit oder Unsymmetrie geltend, wie in dem Felde, das das schwingende Elektron umgibt. Die Richtung dieser Schwingung bildet die Symmetriearchse des Feldes sowohl beim „leuchtenden Punkt“ als auch beim Brennpunkt.

Eine notwendige Folge hiervon ist, daß, im Gegensatz zu der oben betrachteten Lösung der Maxwellschen Gleichungen, hier an *keiner* Stelle des Feldes die Energieströmung  $S$  in *genau* radialer Richtung vor sich geht, daß also der „Strahl“ nirgends *genau* mit der „Wellennormale“ zusammenfällt.

Es ist ja, wie bekannt, die Richtung des Vektors  $S$  durch die Beziehung gegeben:

$$(13) \quad S_x : S_y : S_z = (E_y H_z - E_z H_y) : (E_z H_x - E_x H_z) : (E_x H_y - E_y H_x).$$

Betrachten wir z. B. nur die vom Brennpunkt divergierenden Wellen, so folgt aus (12) und (13)

$$\text{oder} \quad (14) \quad S_x : S_y : S_z = \cos \omega \sin \vartheta : \sin \omega \sin \vartheta : k \cos \vartheta,$$

wo

$$(15) \quad k = \frac{1 + 3 \left( \frac{c}{r} \frac{\varphi'}{\varphi''} + \frac{c^2}{r^2} \frac{\varphi}{\varphi''} \right)}{1 + 3 \left( \frac{c}{r} \frac{\varphi'}{\varphi''} + \frac{c^2}{r^2} \frac{\varphi}{\varphi''} \right) \left( 1 - \frac{2}{3 \sin^2 \vartheta} \right)}.$$

Die Gleichung (14) zeigt, daß die Energieströmung in einem Punkte  $P(r, \vartheta, \omega)$  zwar in der durch diesen Punkt gelegten Meridianebene verläuft, daß dagegen ihre Richtung in dieser Ebene, infolge des Faktors  $k$ , von der Richtung  $r$  abweicht.

Nehmen wir periodische Lösungen, d. h. setzen wir

$$\varphi(t) = A \cos 2 \pi \frac{t}{T},$$

so wird

$$(16) \quad k = \frac{1 + a \operatorname{tg} 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right) - a'}{1 + b \operatorname{tg} 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right) - b'},$$

wo

$$(17) \quad \begin{cases} a = \frac{3\lambda}{2\pi r}, \\ a' = \frac{3\lambda^3}{4\pi^2 r^2}, \\ b = \frac{3\lambda}{2\pi r} \left( 1 - \frac{2}{3\sin^2 \vartheta} \right), \\ b' = \frac{3\lambda^3}{4\pi^2 r^2} \left( 1 - \frac{2}{3\sin^2 \vartheta} \right); \end{cases}$$

$k$  nimmt nun, als Funktion von  $t$ , im Laufe der Zeit wechselnde Werte an. Bilden wir den Mittelwert von  $k$  im Laufe einer Periode, berechnen also

$$(18) \quad \bar{k} = \frac{1}{T} \int_0^T k dt,$$

so führt eine etwas langwierige Rechnung zu folgendem Resultat; es ist

$$(19) \quad \bar{k} = \frac{ab + (1-a')(1-b')}{(1-b')^2 + b^2}$$

oder, wenn man die Werte der Konstanten einsetzt,

$$(20) \quad \bar{k} = \frac{1 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2 r^2} \left( 3 - \frac{4}{\sin^2 \vartheta} \right) + \frac{\lambda^4}{16\pi^4 r^4} \left( 9 - \frac{6}{\sin^2 \vartheta} \right)}{1 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2 r^2} \left( 3 - \frac{8}{\sin^2 \vartheta} + \frac{4}{\sin^4 \vartheta} \right) + \frac{\lambda^4}{16\pi^4 r^4} \left( 9 - \frac{12}{\sin^2 \vartheta} + \frac{4}{\sin^4 \vartheta} \right)}.$$

Wir wollen dabei die Werte  $\vartheta = 0$  und  $\vartheta = \pi$ , für die ja mit dem Feld auch  $\mathfrak{S} = 0$  wird, ausschalten. Ist  $r$  sehr groß gegen  $\lambda$ , d. h. in Entfernungen vom Brennpunkt, die groß gegen die Wellenlänge sind, kann man im Zähler und Nenner von  $\bar{k}$  das zweite und dritte Glied gegen das erste vernachlässigen; dann wird

$$\bar{k} = 1$$

und damit nach (14)

$$(21) \quad \mathfrak{S}_x : \mathfrak{S}_y : \mathfrak{S}_z = x : y : z.$$

D. h. also: in Entfernungen vom Brennpunkt, die groß sind gegen die Wellenlänge, strömt die Energie radial. Indes ist ausdrücklich hervorzuheben, daß dies nicht in aller Strenge, sondern nur in sehr großer Annäherung gilt.

Der Wert der Feldkomponenten ergibt sich in diesem Fall aus (12), wenn man nur die Glieder berücksichtigt, die  $1/r$  als Faktor besitzen. Es wird also in sehr großen Entfernungen vom Brennpunkt:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathfrak{E}_x = -\frac{1}{c^2 r} \varphi'' \left( t - \frac{r}{c} \right) \cos \omega \sin \vartheta \cos \vartheta \\
 \quad - \frac{1}{c^2 r} \varphi'' \left( t + \frac{r}{c} \right) \cos \omega \sin \vartheta \cos \vartheta, \\
 \mathfrak{E}_y = -\frac{1}{c^2 r} \varphi'' \left( t - \frac{r}{c} \right) \sin \omega \sin \vartheta \cos \vartheta \\
 \quad - \frac{1}{c^2 r} \varphi'' \left( t + \frac{r}{c} \right) \sin \omega \sin \vartheta \cos \vartheta, \\
 \mathfrak{E}_z = -\frac{1}{c^2 r} \varphi'' \left( t - \frac{r}{c} \right) \sin^2 \vartheta \\
 \quad + \frac{1}{c^2 r} \varphi'' \left( t + \frac{r}{c} \right) \sin^2 \vartheta, \\
 \mathfrak{H}_x = -\frac{1}{c^2 r} \varphi'' \left( t - \frac{r}{c} \right) \sin \omega \sin \vartheta \\
 \quad - \frac{1}{c^2 r} \varphi'' \left( t + \frac{r}{c} \right) \sin \omega \sin \vartheta, \\
 \mathfrak{H}_y = +\frac{1}{c^2 r} \varphi'' \left( t - \frac{r}{c} \right) \cos \omega \sin \vartheta \\
 \quad + \frac{1}{c^2 r} \varphi'' \left( t + \frac{r}{c} \right) \cos \omega \sin \vartheta, \\
 \mathfrak{H}_z = 0.
 \end{array} \right. \tag{22}$$

Wir wollen wieder, wie in Teil I, die Richtung der Vektoren in zwei entsprechenden, in gleicher Entfernung vor und hinter dem Brennpunkt gelegenen Punkten  $P$  und  $P'$  (Fig. 1) betrachten. In  $P(r, \vartheta, \omega)$  betrachten wir dabei nur die nach dem Brennpunkt konvergierende Welle, in  $P'(r', \vartheta', \omega')$  nur die vom Brennpunkt divergierende.

Es sei wieder, wie früher,

$$r = r' = a \lambda.$$

Dann ist, wenn

$$\varphi(t) = A \cos 2\pi \frac{t}{T} \text{ ist,}$$

$$(23) \quad \varphi''\left(t - \frac{r}{c}\right) = \varphi''\left(t + \frac{r}{c}\right).$$

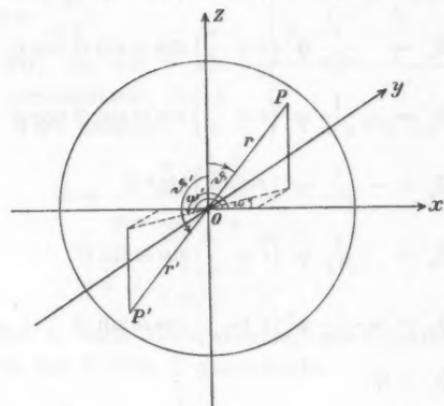


Fig. 1.

Es ist ferner

$$\begin{cases} \omega' = \pi + \omega, \\ \vartheta' = \pi - \vartheta, \end{cases}$$

und daher

$$(24) \quad \begin{cases} \sin \omega' = -\sin \omega, \\ \cos \omega' = -\cos \omega, \\ \sin \vartheta' = \sin \vartheta, \\ \cos \vartheta' = -\cos \vartheta. \end{cases}$$

So wird in  $P$ :

$$(25) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = -\frac{1}{c^2 r} \varphi''\left(t + \frac{r}{c}\right) \cos \omega \sin \vartheta \cos \vartheta, \\ \mathfrak{E}_y = -\frac{1}{c^2 r} \varphi''\left(t + \frac{r}{c}\right) \sin \omega \sin \vartheta \cos \vartheta, \\ \mathfrak{E}_z = +\frac{1}{c^2 r} \varphi''\left(t + \frac{r}{c}\right) \sin^2 \vartheta, \\ \mathfrak{H}_x = -\frac{1}{c^2 r} \varphi''\left(t + \frac{r}{c}\right) \sin \omega \sin \vartheta, \\ \mathfrak{H}_y = +\frac{1}{c^2 r} \varphi''\left(t + \frac{r}{c}\right) \cos \omega \sin \vartheta, \\ \mathfrak{H}_z = 0. \end{cases}$$

In  $P'$ :

$$\mathfrak{E}'_x = \frac{1}{c^2 r'} \varphi'' \left( t - \frac{r}{c} \right) \cos \omega' \sin \vartheta' \cos \vartheta',$$

oder wenn man die Relationen (23) und (24) beachtet,

$$(26) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}'_x = -\frac{1}{c^2 r} \varphi'' \left( t + \frac{r}{c} \right) \cos \omega \sin \vartheta \cos \vartheta = -\mathfrak{E}_x, \\ \mathfrak{E}'_y = -\frac{1}{c^2 r} \varphi'' \left( t + \frac{r}{c} \right) \sin \omega \sin \vartheta \cos \vartheta = -\mathfrak{E}_y, \\ \mathfrak{E}'_z = -\frac{1}{c^2 r} \varphi'' \left( t + \frac{r}{c} \right) \sin^2 \vartheta = -\mathfrak{E}_z, \\ \mathfrak{H}'_x = -\frac{1}{c^2 r} \varphi'' \left( t + \frac{r}{c} \right) \sin \omega \sin \vartheta = -\mathfrak{H}_x, \\ \mathfrak{H}'_y = -\frac{1}{c^2 r} \varphi'' \left( t + \frac{r}{c} \right) \cos \omega \sin \vartheta = -\mathfrak{H}_y, \\ \mathfrak{H}'_z = 0. \end{cases}$$

Wie man sieht, haben beide Vektoren,  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$ , nach dem Durchgang durch den Brennpunkt, in Entfernungen, die groß gegen die Wellenlänge sind, das *umgekehrte* Vorzeichen wie in entsprechenden Punkten vor dem Durchgang durch den Brennpunkt.

Wir wollen nun zweitens den Fall untersuchen, daß  $r$  klein sei gegen  $\lambda$ ; wir gelangen damit zu der unmittelbaren Nachbarschaft des Brennpunktes und zum Brennpunkt selbst.

Es nimmt in diesem Falle, wie man aus (20) erkennt, der Faktor  $\bar{k}$  einen von 1 im allgemeinen verschiedenen Wert an; d. h. die Energie strömt in Entfernungen vom Brennpunkt, die klein sind gegen die Wellenlänge, durchaus nicht in radialer Richtung auf den Brennpunkt zu, oder von ihm fort.

Wir wollen diese Abweichungen etwas näher betrachten.  
Setzen wir

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

und

$$\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2 = \mathfrak{E}_\rho^2,$$

so folgt aus (14)

$$(27) \quad \mathfrak{E}_z : \mathfrak{E}_\rho = \bar{k} \cdot z : \rho.$$

Setzen wir nun (vgl. Fig. 2)

$$(28) \quad \frac{\xi_z}{\xi_\varrho} = \operatorname{tg} \alpha,$$

so folgt aus (27)

$$(29) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\bar{k}}{\operatorname{tg} \vartheta}.$$

Nun können wir, da wir  $r$  als klein gegen  $\lambda$  voraussetzen, für  $\bar{k}$  nach (20) den Wert nehmen:

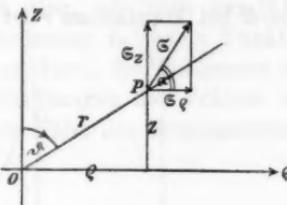


Fig. 2.

$$\bar{k} = \frac{9 - \frac{6}{\sin^2 \vartheta}}{9 - \frac{12}{\sin^2 \vartheta} + \frac{4}{\sin^4 \vartheta}}.$$

oder

$$(30) \quad \bar{k} = \frac{3 \sin^2 \vartheta}{3 \sin^2 \vartheta - 2}.$$

Der Verlauf, den  $\bar{k}$ , nach dieser Formel, als Funktion von  $\vartheta$  nimmt, ist etwa der in Fig. 3 gezeichnete.

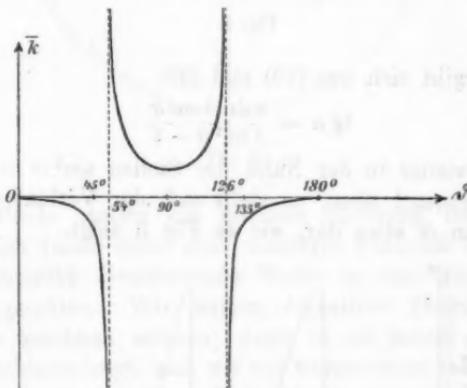


Fig. 3.

An den Stellen, wo  $\sin^2 \vartheta = \frac{2}{3}$  ist, also etwa für  $\vartheta = 54^\circ$  und  $\vartheta = 126^\circ$ , springt  $\bar{k}$  von  $-\infty$  nach  $+\infty$  bzw. umgekehrt.

Dieser Sprung ist indessen nur durch die Ungenauigkeit der Formel (30) hervorgerufen. Eine leichte Diskussion der genaueren Formel (20) zeigt, daß  $\bar{k}$  an den Stellen, wo  $\sin^2 \vartheta = \frac{2}{3}$  ist, nicht unendlich wird, sondern nur sehr große Werte annimmt, und in der Nähe dieser Stellen steil durch

Null hindurchgeht. Der genaue Verlauf von  $\bar{k}$  als Funktion von  $\vartheta$  bei konstantem  $r$  ist also etwa der in Fig. 4 angegebene.

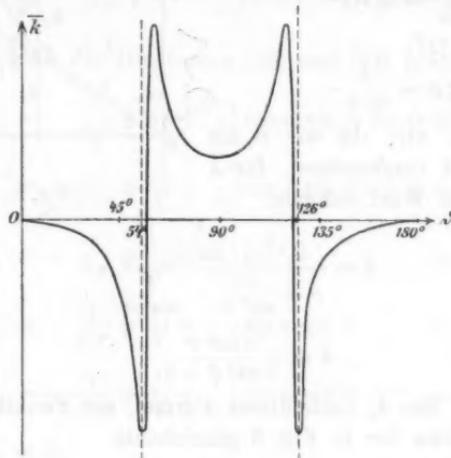


Fig. 4.

Nun ergibt sich aus (29) und (30)

$$(31) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{3 \sin \vartheta \cos \vartheta}{3 \sin^2 \vartheta - 2}.$$

Geht man wieder in der Nähe der Stellen  $\sin^2 \vartheta = \frac{2}{3}$  zu der genaueren Formel über, so stellt sich der Verlauf von  $\alpha$  als Funktion von  $\vartheta$  etwa dar, wie es Fig. 5 zeigt.

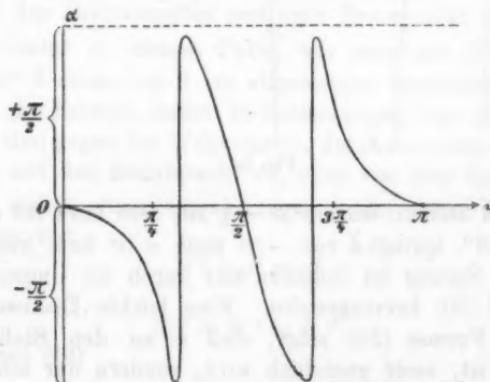


Fig. 5.

$\alpha$  gibt uns nun in der  $\varrho z$ -Ebene die Richtung der Energieströmung. Für kleine  $r$  ist also, wie man aus (31) ersieht, die Richtung der Energieströmung in jedem Punkte wesentlich unabhängig von  $r$  und nur durch die Poldistanz  $\vartheta$  bestimmt. So ergibt sich für die Richtungen des Vektors  $\mathfrak{S}$  an den verschiedenen Punkten in der Nähe des Brennpunktes etwa das in Fig. 6 gezeichnete Bild.

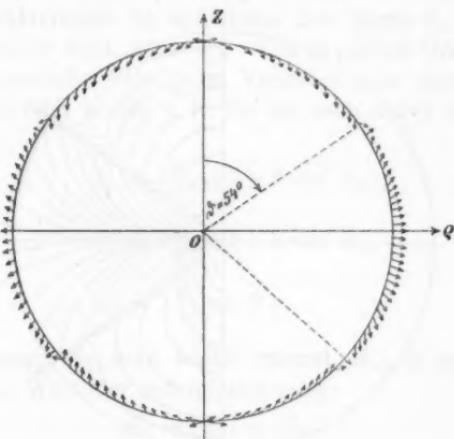


Fig. 6.

Die Pfeile stellen die mittlere Richtung der Energieströmung im Laufe einer oder mehrerer Perioden dar für die vom Brennpunkt divergierende Welle in der Nachbarschaft des Brennpunktes. Wir hätten eigentlich überall Doppelpfeile  $\leftrightarrow$  zeichnen müssen; denn es ist jedem  $\alpha$  auch ein  $\pi + \alpha$  gleichberechtigt, und, wie wir weiter unten sehen werden, strömt der weitaus größere Teil der Energie im Laufe einer Periode 2 mal *hin und her*. Man erkennt, daß in der Nähe des Äquators (streng genommen nur für  $\vartheta = \pi/2$ ) die Energie in radialer Richtung strömt. Je mehr man sich den Polen nähert, um so weiter weicht die Richtung von  $\mathfrak{S}$  von der radialen ab; in der Nähe der Stellen, wo  $\vartheta = 54^\circ$  und  $126^\circ$  (etwa) ist, geht die Energieströmung nahezu parallel der  $Z$ -Achse und wechselt in einem sehr schmalen  $\vartheta$ -Bereich stetig ihre Richtung um fast zwei Rechte. Von hier ab wird, nach

den Polen hin, die Richtung allmählich der  $\varrho$ -Achse parallel. In jenem schmalen  $\vartheta$ -Bereich, wo die Richtung von  $\mathfrak{E}$  schnell variiert, ist daher auch ein ausgezeichneter Wert  $\vartheta_0$  vorhanden, für den die Energie wieder genau radial strömt.

Wenn man die obige Figur für verschiedene  $r$  konstruiert, so gelangt man zu dem Bilde der Energieströmungskurven, das demnach etwa aussieht, wie es Fig. 7 zeigt.

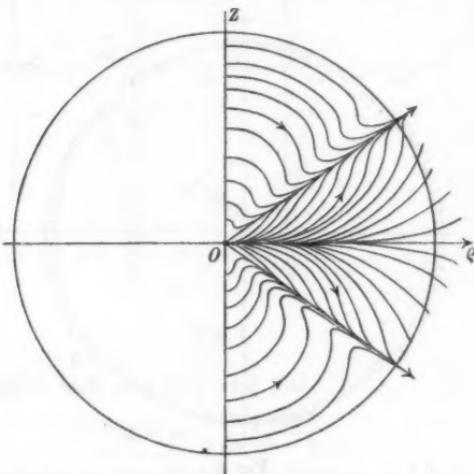


Fig. 7.

Die Feldkomponenten der elektrischen und magnetischen Kraft nehmen in unserem Falle ( $r$  klein gegen  $\lambda$ ) folgende Werte an:

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_x = \left\{ \frac{3}{c r^2} \varphi' \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{3}{r^3} \varphi \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\} \cos \omega \sin \vartheta \cos \vartheta \\ \quad + \left\{ \frac{3}{c r^2} \varphi' \left( t + \frac{r}{c} \right) - \frac{3}{r^3} \varphi \left( t + \frac{r}{c} \right) \right\} \cos \omega \sin \vartheta \cos \vartheta, \\ \mathfrak{E}_y = \left\{ \frac{3}{c r^2} \varphi' \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{3}{r^3} \varphi \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\} \sin \omega \sin \vartheta \cos \vartheta \\ \quad + \left\{ \frac{3}{c r^2} \varphi' \left( t + \frac{r}{c} \right) - \frac{3}{r^3} \varphi \left( t + \frac{r}{c} \right) \right\} \sin \omega \sin \vartheta \cos \vartheta, \\ \mathfrak{E}_z = - \left\{ \frac{1}{c r^2} \varphi' \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r^3} \varphi \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\} (1 - 3 \cos^2 \vartheta) \\ \quad - \left\{ \frac{1}{c r^2} \varphi' \left( t + \frac{r}{c} \right) - \frac{1}{r^3} \varphi \left( t + \frac{r}{c} \right) \right\} (1 - 3 \cos^2 \vartheta), \end{array} \right.$$

$$(32) \quad \begin{cases} \mathfrak{H}_x = -\frac{1}{c r^2} \varphi' \left( t - \frac{r}{c} \right) \sin \omega \sin \vartheta + \frac{1}{c r^2} \varphi' \left( t + \frac{r}{c} \right) \sin \omega \sin \vartheta, \\ \mathfrak{H}_y = +\frac{1}{c r^2} \varphi' \left( t - \frac{r}{c} \right) \cos \omega \sin \vartheta - \frac{1}{c r^2} \varphi' \left( t + \frac{r}{c} \right) \cos \omega \sin \vartheta, \\ \mathfrak{H}_z = 0. \end{cases}$$

Wir sehen, daß die elektrische Kraft aus der Übereinanderlagerung zweier Wellen  $\mathfrak{E}_1$  und  $\mathfrak{E}_2$  besteht, von denen  $\mathfrak{E}_1$  durch  $\varphi'/c r^2$  charakterisiert ist und daher hier gegen  $\mathfrak{E}_2$ , das durch  $\varphi/r^2$  dargestellt wird, klein ist. Von derselben Ordnung klein ist das magnetische Feld  $\mathfrak{H}$  im Vergleich zum elektrischen.

Aus (32) folgt leicht, z. B. für die nach außen schreitenden Wellen:

$$(33) \quad |\mathfrak{E}_1| = \frac{\varphi'}{c r^2} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta},$$

$$(34) \quad |\mathfrak{E}_2| = \frac{\varphi}{r^2} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta},$$

$$(35) \quad |\mathfrak{H}| = \frac{\varphi}{c r^2} \sin \vartheta.$$

Da ferner, wie man leicht erkennt,  $\mathfrak{E} \perp \mathfrak{H}$  steht, so ist der absolute Wert der Energieströmung:

$$(36) \quad |\mathfrak{S}| = |\mathfrak{S}_1| + |\mathfrak{S}_2|,$$

wobei

$$(37) \quad |\mathfrak{S}_1| = \frac{\varphi'^2}{4 \pi c r^4} \sin \vartheta \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta}$$

und

$$(38) \quad |\mathfrak{S}_2| = \frac{\varphi \cdot \varphi'}{4 \pi r^5} \sin \vartheta \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta}.$$

Setzen wir nun, wie stets,

$$\varphi(t) = A \cos 2 \pi \frac{t}{T},$$

so wird in  $|\mathfrak{S}_1|$  der Faktor

$$\sin^2 2 \pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right)$$

aufreten, in  $|\mathfrak{S}_2|$  der Faktor

$$\sin 2 \pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right) \cdot \cos 2 \pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right).$$

Hieraus ersieht man, daß der überwiegende Teil der Energie (durch die Strömung  $|\mathfrak{S}_2|$  dargestellt) hin und her strömt in der

aus der obigen Figur durch die Pfeile ersichtlichen Richtung. Und zwar findet nach jeder Viertelperiode ein Wechsel der Richtung statt. Bildet man

$$\int_0^T |\mathfrak{S}_2| dt,$$

so findet man den Wert 0. D. h. die gesamte Strömung  $|\mathfrak{S}_2|$  im Laufe einer Periode nach außen ist Null.

Anders verhält es sich mit  $|\mathfrak{S}_1|$ , das während einer Periode seine Richtung beibehält. In  $|\mathfrak{S}_1|$  tritt uns also eine wirklich einseitige Strömung der Energie, oder eine Strahlung nach außen, entgegen. Der Wert dieser Energiestromung ist im Vergleich zu dem der oszillierenden Stromung  $|\mathfrak{S}_2|$  sehr klein, und um so verschwindender, je näher man dem Brennpunkt kommt.

Wir wollen nun auch noch die Richtung der Vektoren  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  an zwei entsprechenden Punkten

$$P(r, \vartheta, \omega) \quad \text{und} \quad P'(r, \pi - \vartheta, \pi + \omega)$$

vor und hinter dem Brennpunkt näher untersuchen, wie wir es schon oben im Falle  $r$  groß gegen  $\lambda$  taten.

Je kleiner  $r$  im Vergleich zu  $\lambda$  ist, um so weniger fallen in den elektrischen Feldkomponenten, wie man aus (32) erkennt, die Glieder, die den Faktor  $1/c r^3$  haben, gegen die, die  $r^3$  im Nenner führen, ins Gewicht. Setzen wir wieder

$$\varphi(t) = A \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

und betrachten die Vektoren des Feldes in  $P$  und  $P'$  zu den durch  $t = a T$  definierten Zeiten, so findet man den Satz:

Ist  $r$  sehr klein gegen  $\lambda$ , so haben an entsprechenden Punkten

$$P(r, \vartheta, \omega) \quad \text{und} \quad P'(r, \pi - \vartheta, \pi + \omega)$$

zu allen durch  $t = a T$  definierten Zeiten (d. h. nach Ablauf ganzzahliger Vielfacher der Periode  $T$ ) die elektrische Kraft  $\mathfrak{E}$  und die magnetische Kraft  $\mathfrak{H}$  annähernd *entgegengesetzt gleiche Werte*. Das Umgekehrte würde eintreten, wenn wir

$$\varphi(t) = A \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

setzen würden. Dagegen folgt aus (32), unabhängig von dem Werte von  $\varphi(t)$ , daß im Brennpunkte selbst  $E$  sein Zeichen umkehrt,  $H$  dagegen stetig verläuft. Das Feld im Brennpunkt, also für  $r=0$ , ist, wie man aus (12) leicht erkennt, endlich. Die elektrischen und magnetischen Feldkomponenten nehmen dort folgende Werte an:

$$(39) \quad \begin{cases} E_x = 0, & H_x = 0, \\ E_y = 0, & H_y = 0, \\ E_z = \frac{4}{3} \epsilon^3 \varphi'''(t), & H_z = 0. \end{cases}$$

## § 2.

Wir wollen im folgenden den Einfluß untersuchen, den eine kreisrunde beugende Öffnung (eine Blende) und eine unendlich dünne Sammellinse auf solche Wellen, wie wir sie im vorigen Paragraphen betrachteten, ausübt. D. h. wir behandeln prinzipiell dasselbe Problem, wie im ersten Teil, nur daß wir an Stelle des dort unbestimmt gelassenen leuchtenden Punktes  $Q$  hier das einfachste Modell einer Lichtquelle, einen kleinen Dipol von periodisch veränderlichem Moment, einführen.

Der Gang der Rechnung ist dem in Teil I analog.

Wir behandeln daher auch hier zuerst nur den Einfluß der beugenden Öffnung auf die vom Oszillatator ausgesandten

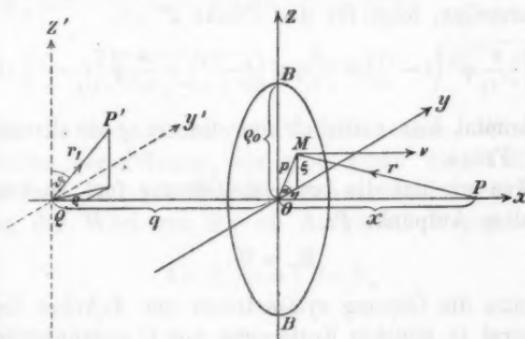


Fig. 8.

Wellen (d. h. wir denken uns die Linse fort). In  $Q$  (Fig. 8) befindet sich der der  $Z$ -Achse parallel orientierte Oszillatator, der nach der beugenden Öffnung  $BB'$  divergierende Wellen

sendet. Die Öffnung ist kreisförmig, ihr Radius sei  $r_0$  und ihr Mittelpunkt liege im Anfangspunkt  $O$  des rechtwinkligen Koordinatensystems  $x y z$ , so daß die Öffnung in der  $YZ$ -Ebene liegt.

In  $Q$  führen wir ein Hilfskoordinatensystem  $x' y' z'$  ein, bei dem die  $X'$ -Achse mit der  $X$ -Achse zusammenfällt, während die  $Y'$ -Achse und  $Z'$ -Achse der  $Y$ -Achse bzw. der  $Z$ -Achse parallel sind.

Die Entfernung eines Punktes  $P'$  von  $Q$ , also  $\overrightarrow{QP'}$  nennen wir  $r_1$ . Den Winkel  $Z' Q P'$  bezeichnen wir mit  $\vartheta$  (Poldistanz), die Projektion von  $r_1$  auf die  $X' Y'$ -Ebene sei  $\varphi$ .

Ferner sei  $Q O = q$ . Ein Punkt  $M$  in der Öffnung habe die Koordinaten  $0, \eta, \zeta$ , seine Entfernung von  $O$  sei  $= p$  und  $p$  bilde mit der  $Y$ -Achse den Winkel  $\alpha$ .

Der Aufpunkt  $P$ , für den wir die Beugungserscheinung berechnen wollen, liege auf der  $X$ -Achse in der Entfernung  $z$  von  $O$ . Der von  $P$  nach  $M$  gezogene Strahl sei  $r$ .

Wir untersuchen nun an erster Stelle den Einfluß der beugenden Öffnung  $BB$  auf die vom Oszillator hervorgerufene elektrische Kraft  $E$ , und zwar betrachten wir  $E_e = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$  und  $E_z$  gesondert.

Aus den Grundgleichungen (12), die das Feld unserer Lichtquelle darstellen, folgt für den Punkt  $P'$

$$(40) \quad E_e = \left\{ \frac{1}{c^2 r_1} \varphi'' \left( t - \frac{r_1}{c} \right) + \frac{3}{c r_1^2} \varphi' \left( t - \frac{r_1}{c} \right) + \frac{3}{r_1^3} \varphi \left( t - \frac{r_1}{c} \right) \right\} \sin \vartheta \cos \vartheta.$$

Es kommt hier natürlich nur die von  $Q$  aus divergierende Welle in Frage.

Denken wir uns die beugende Öffnung fort, so wäre demnach in dem Aufpunkt  $P$ :

$$E_e = 0.$$

Da nun die Öffnung symmetrisch zur  $X$ -Achse liegt und an diametral in gleicher Entfernung von  $O$  gegenüberliegenden Stellen der Öffnung  $E_e$  entgegengesetzt gleiche Werte hat, so ist ohne weitere Rechnung ersichtlich, daß auch die beugende Öffnung das obige Resultat nicht ändert: Es ist auch im Falle der Beugung

$$(41) \quad E_e = 0.$$

Wir untersuchen nun  $\mathfrak{E}_z$ .

Nach (12) ist

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_z = - \frac{\varphi'' \left( t - \frac{r_1}{c} \right)}{c^2 r_1} \sin^2 \vartheta - \frac{\varphi' \left( t - \frac{r_1}{c} \right)}{c r_1^2} (1 - 3 \cos^2 \vartheta) \\ \quad - \frac{\varphi \left( t - \frac{r_1}{c} \right)}{r_1^3} (1 - 3 \cos^2 \vartheta), \end{array} \right.$$

oder, wenn wir

$$\varphi(t) = a \cos \frac{2\pi t}{T}$$

setzen

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_z = \frac{4\pi^2 a \sin^2 \vartheta}{\lambda^2 r_1} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) \\ \quad + \frac{2\pi a (1 - 3 \cos^2 \vartheta)}{\lambda r_1^2} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) \\ \quad - \frac{a (1 - 3 \cos^2 \vartheta)}{r_1^3} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) \\ = \mathfrak{E}_{z1} + \mathfrak{E}_{z2} + \mathfrak{E}_{z3}. \end{array} \right.$$

Wir behandeln nun zuerst den Einfluß der Beugung auf  $\mathfrak{E}_{z1}$ . Es ist

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_{z1} = \frac{4\pi^2 a \sin^2 \vartheta}{\lambda^2 r_1} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) \\ = \frac{4\pi^2 a (x'^2 + y'^2)}{\lambda^2 (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{\lambda} \right), \end{array} \right.$$

wenn wir die Koordinaten von  $P'$   $x' y' z'$  nennen. Wir setzen  $\varrho_0$ , den Radius der Öffnung, als groß gegen die Wellenlänge  $\lambda$  voraus; dann ist nach dem Huygensschen Prinzip in strenger Fassung der Wert von  $\mathfrak{E}_{z1}$  im Aufpunkte  $P$  gegeben durch:

$$(45) \quad 4\pi (\mathfrak{E}_{z1})_P = \int d\sigma \Omega_\nu,$$

wo

$$(45a) \quad \Omega_\nu = \left\{ \mathfrak{E}_{z1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} - \frac{1}{c r} \frac{\partial \mathfrak{E}_{z1}}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial \nu} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{E}_{z1}}{\partial \nu} \right\} \Big|_{t - \frac{r}{c}}.$$

$d\sigma$  ist ein Flächenelement der Öffnung, über die die Integration in (45) zu erstrecken ist.  $r$  ist der von  $P$  nach einem Punkt der Öffnung gezogene Strahl,  $\nu$  die Richtung der von

der Lichtquelle  $Q$  fortweisenden Normale, die also hier mit der Richtung der positiven  $x$  übereinstimmt.

Aus (44) folgt für Punkte der Öffnung

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_{x_1}}{\partial \nu} = \left( \frac{\partial \mathfrak{E}_{x_1}}{\partial x'} \right)_{\substack{x'=q \\ y'=\eta \\ z'=\zeta}} = \frac{8 \pi^3 a q}{\lambda^3} \frac{r_1^{-3} - \frac{3}{4}(q^3 + \eta^3)}{r_1^5} \cos 2 \pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) + \frac{8 \pi^3 a q (q^3 + \eta^3)}{\lambda^3 r_1^4} \sin 2 \pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right).$$

Daher wird

$$(46) \quad \begin{cases} \Omega_\nu = \frac{x}{r^8} \frac{4 \pi^3 a (q^3 + \eta^3)}{\lambda^3 r_1^8} \cos \Theta - \frac{8 \pi^3 x a (q^3 + \eta^3)}{\lambda^3 r^5 r_1^3} \sin \Theta \\ \quad - \frac{1}{r} \frac{8 \pi^3 a q}{\lambda^3} \frac{r_1^{-3} - \frac{3}{4}(q^3 + \eta^3)}{r_1^5} \cos \Theta - \frac{8 \pi^3 a q (q^3 + \eta^3)}{\lambda^3 r^4 r_1^4} \sin \Theta, \end{cases}$$

wo

$$(46a) \quad \Theta = 2 \pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r + r_1}{\lambda} \right),$$

Es ist nun

$$(47) \quad \begin{cases} \eta = p \cos \alpha, \\ d\sigma = p \, dp \, d\alpha. \end{cases}$$

Wir setzen im folgenden stets voraus, daß  $\rho_0$  und  $a$  fortiori  $p$  klein ist gegen  $x$  und  $q$ . Dann können wir setzen:

$$(48) \quad \begin{cases} r = x \left( 1 + \frac{p^3}{2x^3} \right), \\ r_1 = q \left( 1 + \frac{p^3}{2q^3} \right) \end{cases}$$

und es wird

$$(49) \quad \begin{cases} \Omega_\nu = \cos \Theta \left\{ A - A_1 p^3 - A_2 \frac{p^3}{q^2} \sin^2 \alpha \right\} \\ \quad - \sin \Theta \left\{ B - B_1 p^2 - B_2 \frac{p^3}{q^2} \sin^2 \alpha \right\}. \end{cases}$$

Dabei sind die Konstanten  $A$ ,  $A_1$  usw. durch folgende Gleichungen definiert:

$$(50) \quad \begin{cases} A = \frac{4 \pi^3 a}{x q \lambda^3} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{q} \right), \\ A_1 = \frac{2 \pi^3 a}{\lambda^3 x q^3} \left( \frac{1}{x} + \frac{3}{q} \right) + \frac{2 \pi^3 a}{\lambda^3 q x^3} \left( \frac{1}{q} + \frac{3}{x} \right), \\ A_2 = \frac{4 \pi^3 a}{\lambda^3 q x} \left( \frac{1}{x} + \frac{3}{q} \right), \end{cases}$$

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} B = \frac{16 \pi^3 a}{\lambda^3 x q}, \\ B_1 = \frac{12 \pi^3 a}{\lambda^3 x q} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{q^2} \right), \\ B_2 = \frac{16 \pi^3 a}{\lambda^3 x q} = B. \end{array} \right.$$

Ferner wird

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta = \Theta_0 - \frac{\pi p^3}{\lambda} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{q} \right), \\ \text{wo} \\ \Theta_0 = 2 \pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x+q}{\lambda} \right). \end{array} \right.$$

Setzen wir daher:

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_{\cos} = \int d\sigma \left\{ A - A_1 p^2 - A_2 \frac{p^3}{q^2} \sin^2 \alpha \right\} \cos \frac{\pi p^3}{\lambda} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{q} \right), \\ J_{\sin} = \int d\sigma \left\{ A - A_1 p^2 - A_2 \frac{p^3}{q^2} \sin^2 \alpha \right\} \sin \frac{\pi p^3}{\lambda} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{q} \right), \\ J'_{\cos} = \int d\sigma \left\{ B - B_1 p^2 - B_2 \frac{p^3}{q^2} \sin^2 \alpha \right\} \cos \frac{\pi p^3}{\lambda} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{q} \right), \\ J'_{\sin} = \int d\sigma \left\{ B - B_1 p^2 - B_2 \frac{p^3}{q^2} \sin^2 \alpha \right\} \sin \frac{\pi p^3}{\lambda} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{q} \right), \end{array} \right.$$

so wird

$$(53) \quad \int d\sigma \Omega_r = \cos \Theta_0 [J_{\cos} + J'_{\sin}] + \sin \Theta_0 [J_{\sin} - J'_{\cos}].$$

Die Ausführung der Integrationen in (52) ist einfach und ergibt unter Benutzung der abkürzenden Bezeichnung

$$(54) \quad u_0 = \frac{\pi q_0^3}{\lambda} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{q} \right)$$

folgende Werte:

$$(55) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_{\cos} = \frac{A \lambda x q}{q+x} \sin u_0 - \left( A_1 + \frac{A_2}{2 q^2} \right) \frac{\lambda^3 x^3 q^3}{\pi(q+x)^2} (u_0 \sin u_0 + \cos u_0 - 1), \\ J_{\sin} = \frac{A \lambda x q}{q+x} (1 - \cos u_0) - \left( A_1 + \frac{A_2}{2 q^2} \right) \frac{\lambda^3 x^3 q^3}{\pi(q+x)^2} (\sin u_0 - u_0 \cos u_0). \end{array} \right.$$

$J'_{\cos}$  und  $J'_{\sin}$  ergeben sich hieraus, wenn man  $A$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  durch  $B$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  ersetzt.

So folgt schließlich aus (53)

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int d\sigma \Omega_r = 4\pi (\mathcal{E}_1)_P = \cos \Theta_0 [M \sin u_0 + N \cos u_0 + P] \\ \quad + \sin \Theta_0 [N \sin u_0 - M \cos u_0 + S]. \end{array} \right.$$

Dabei haben  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $S$  folgende Bedeutung:

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} M = \frac{\lambda x q}{q+x} \left[ A - \left( B_1 + \frac{B_2}{2q^2} \right) \frac{\lambda x q}{\pi(q+x)} - \left( A_1 + \frac{A_2}{2q^2} \right) \varrho_0^2 \right], \\ N = \frac{\lambda x q}{q+x} \left[ -B - \left( A_1 + \frac{A_2}{2q^2} \right) \frac{\lambda x q}{\pi(q+x)} + \left( B_1 + \frac{B_2}{2q^2} \right) \varrho_0^2 \right], \\ P = \frac{\lambda x q}{q+x} \left[ B + \left( A_1 + \frac{A_2}{2q^2} \right) \frac{\lambda x q}{\pi(q+x)} \right], \\ S = \frac{\lambda x q}{q+x} \left[ A - \left( B_1 + \frac{B_2}{2q^2} \right) \frac{\lambda x q}{\pi(q+x)} \right], \end{array} \right.$$

wobei noch für  $A$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  die Werte aus (50) einzusetzen sind.

Definiert man nun, im Anschluß an (56), zwei neue Größen  $C$  und  $\delta$  durch die beiden Gleichungen:

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4\pi} \left[ M \sin u_0 + N \cos u_0 + P \right] = \frac{4\pi^3}{\lambda^3(q+x)} C \cos \delta, \\ \frac{1}{4\pi} \left[ M \cos u_0 - N \sin u_0 - S \right] = \frac{4\pi^3}{\lambda^3(q+x)} C \sin \delta, \end{array} \right.$$

so folgt aus (56):

$$(59) \quad (\mathfrak{E}_{z1})_P = \underline{\frac{4\pi^2 C}{\lambda^3(q+x)} \cos(\Theta_0 + \delta)}.$$

Diese Formel, in Verbindung mit (50), (57) und (58), stellt die Lösung des Problems dar, das erste Glied der  $Z$ -Komponente der elektrischen Kraft in  $P$  unter Berücksichtigung der Beugung zu berechnen.

Aus (58) folgt, unter Benutzung von (57) und (50) nach leichter Rechnung:

$$(60) \quad \left\{ \begin{array}{l} C \cos \delta = a \left\{ (1 - \cos u_0) \left[ 1 + \frac{\lambda^3}{8\pi^3(q+x)} \frac{6x^3 + 2qx^2 + q^2x + 2q^3}{q^3x^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{5}{4} \frac{\varrho_0^3}{q^3} - \frac{3}{4} \frac{\varrho_0^2}{x^3} \right] \right. \\ \left. - \frac{\lambda}{4\pi} \sin u_0 \left[ \frac{(x-q)^3 + 3x^2 + q^3}{qx(q+x)} + \frac{\varrho_0^2}{2} \frac{6x^3 + 2qx^2 + q^2x + 3q^3}{q^3x^3} \right] \right. \\ \left. + \left[ \frac{5}{4} \frac{\varrho_0^3}{q^3} + \frac{3}{4} \frac{\varrho_0^2}{x^3} \right] \right\} \end{array} \right.$$

und

$$(60) \quad \left\{ \begin{array}{l} C \sin \delta = a \left\{ \sin u_0 \left[ 1 + \frac{\lambda^2}{8 \pi^2 (q+x)} \frac{6x^3 + 2qx^2 + q^2x + 3q^3}{q^2x^2} - \frac{5}{4} \frac{q_0^2}{q^2} - \frac{3}{4} \frac{q_0^2}{x^2} \right] \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\lambda}{4\pi} (1 - \cos u_0) \left[ \frac{(x-q)^2 + 3x^2 + q^2}{qx(q+x)} + \frac{q_0^2}{2} \frac{6x^3 + 2qx^2 + q^2x + 3q^3}{q^3x^3} \right] \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\lambda q_0^2}{8\pi} \frac{6x^3 + 2qx^2 + q^2x + 3q^3}{q^3x^3} \right\}, \right. \end{array} \right.$$

$u_0$  ist dabei durch (54) definiert.

Wir setzen nun fest: es sei

$$(61) \quad C > 0.$$

Dann ist durch die *beiden* Gleichungen (60) der Quadrant, in dem die Phasenanomalie  $\delta$  liegt, vollständig bestimmt.

Der ungefähre Verlauf von  $\delta$  ergibt sich aus folgenden Betrachtungen:

Setzt man

$$u_0 = 2a\pi \quad (a = 1, 2, 3 \text{ usw.}),$$

wird nach (60)

$$C \cos \delta = a \left( \frac{5}{4} \frac{q_0^2}{q^2} + \frac{3}{4} \frac{q_0^2}{x^2} \right) > 0,$$

$$C \sin \delta = -a \frac{\lambda q_0^2}{8\pi} \frac{2qx^2 + 6x^3 + q^2x + 3q^3}{q^3x^3} < 0.$$

Also liegt  $\delta$  dann im  $(-1)^{\text{ten}}$  Quadrant. Ferner folgt

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{\lambda}{8\pi q} \cdot \frac{6x^3 + 2qx^2 + q^2x + 3q^3}{\frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{4}xq^2}.$$

D. h.  $\operatorname{tg} \delta$  ist sehr klein negativ.  $\delta$  liegt also, im  $(-1)^{\text{ten}}$  Quadranten, der Null sehr nahe. Um also die Nullstellen von  $\delta$  zu erhalten, setzen wir

$$(62) \quad u_0 = 2a\pi + \varepsilon,$$

wobei  $\varepsilon$  so klein ist, daß wir

$$\cos \varepsilon = 1,$$

$$\sin \varepsilon = \varepsilon$$

setzen können. Dann bestimmt sich  $\varepsilon$  aus der Gleichung:

$$(63) \quad \varepsilon = \frac{\lambda q_0^2}{8\pi} \cdot \frac{2qx^2 + 6x^3 + q^2x + 3q^3}{q^3x^3 \left[ 1 + \frac{\lambda^2}{8\pi^2(q+x)} \frac{6x^3 + 2qx^2 + q^2x + 3q^3}{q^2x^2} - \frac{5}{4} \frac{q_0^2}{q^2} - \frac{3}{4} \frac{q_0^2}{x^2} \right]}.$$

$\varepsilon$  ist also in der Tat sehr klein und positiv. Die Nullstellen von  $\delta$  liegen also in unmittelbarer Nähe der Stellen, wo  $u_0 = 2 \alpha \pi$  ist.

Wir stellen nun die Frage: kann  $\cos \delta = 0$  werden? Wie man sofort aus (60) erkennt, könnte dies ebenfalls nur in der Nähe der Stellen eintreten, wo  $u_0 = 2 \alpha \pi$  wird.

Setzen wir also

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{und } u_0 = 2 \alpha \pi + q \\ \cos u_0 = 1, \\ \sin u_0 = \varphi, \end{array} \right.$$

so würde für die Nullstelle von  $\cos \delta$  der Wert folgen:

$$\varphi = \frac{\pi \varrho_0^2}{\lambda q} \cdot \frac{5xq + 3q^2 \frac{q}{x} + 5x^3 + 3q^3}{(x-q)^3 + 3x^2 + q^3}.$$

Es müßte also  $\pi \varrho_0^2 / \lambda q$  klein sein.

Nun war aber bei den Experimenten (vgl. Teil I) etwa

$$q = 8 \cdot 10^3 \text{ mm},$$

$$\varrho_0 = 5 \text{ mm},$$

$$\lambda = 5 \cdot 10^{-4} \text{ mm}.$$

Daher

$$\frac{\pi \varrho_0^2}{\lambda q} \text{ etwa } = 20,$$

also durchaus nicht klein. Es existiert daher keine Nullstelle von  $\delta$  und es ist stets hier:

$$(64) \quad \cos \delta > 0.$$

Daraus folgt, daß  $\delta$  im 1<sup>ten</sup> und (-1)<sup>ten</sup> Quadranten verläuft.

Wenn also auch in der Nähe der Stellen  $u_0 = 2 \alpha \pi \cos \delta$  nie bis zum Werte Null sinkt, so liegt doch das Minimum sicher in der Nähe dieser Stellen. D. h.: die Maxima und Minima von  $\delta$  liegen in der Nähe der Stellen  $u_0 = 2 \alpha \pi$ , also auch nahe an den Nullstellen von  $\delta$ ; der Anstieg vom Minimum zum Maximum ist daher steil.

Für  $u_0 = \pi, 3\pi, 5\pi$  usw. ist  $\cos u_0 = -1$ ,  $\sin u_0 = 0$ , und es folgt aus (60), daß

$$\cos \delta > 0$$

und

$$\sin \delta > 0,$$

d. h.  $\delta$  liegt im 1<sup>ten</sup> Quadranten; ferner ergibt sich für  $\operatorname{tg} \delta$  ein kleiner Wert, so daß  $\delta$  also in der Nähe von Null im 1<sup>ten</sup> Quadranten liegt. Es müssen daher auch in der Nähe dieser Stellen, an denen  $u_0 = (2a + 1)\pi$  ist, Nullstellen von  $\delta$  liegen. Setzt man also

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = (2a + 1)\pi + \varepsilon', \\ \cos u_0 = -1, \\ \sin u_0 = -\varepsilon' \end{array} \right.$$

und bestimmt  $\varepsilon'$  aus der Beziehung  $\sin \delta = 0$ , so findet man in der Tat für  $\varepsilon'$  einen kleinen, positiven Wert.

Nach alledem ist also der Verlauf von  $\delta$  als Funktion von  $u_0$  etwa der in Fig. 9 skizzierte.

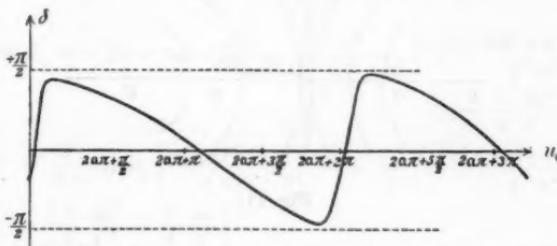


Fig. 9.

Als Funktion von  $x$  würde sich demnach  $\delta$  etwa darstellen, wie es Fig. 10 zeigt.

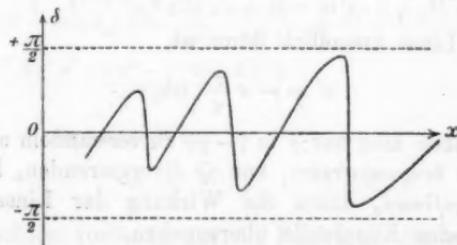


Fig. 10.

## § 3.

Wir wollen, ehe wir den Einfluß der Beugung auch für die übrigen Glieder der  $E_z$ -Welle behandeln, hier gleich zu

dem Problem mit der Linse übergehen. Es wird also in diesem Paragraphen die Aufgabe gelöst, den Einfluß einer unendlich dünnen Sammellinse + einer kreisförmigen beugenden Öffnung (einer Blende) auf die von unserem „leuchtenden Punkt“ ausgesandte Welle  $\mathfrak{E}_{z1}$  zu berechnen.

Wir beschreiten dabei denselben Weg, wie in Teil I.

Denken wir uns für einen Augenblick die Linse fort, so ist, bei vernachlässigter Beugung, im Aufpunkt  $P$  nach (44)

$$(65) \quad (\mathfrak{E}_{z1})_P = \frac{4\pi^2 a}{\lambda^2(q+x)} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{q+x}{\lambda} \right).$$

Verwandeln wir nun diese von  $Q$  divergierende Welle (Fig. 11) durch die unendlich dünne Linse in eine nach  $Q'$  konvergierende

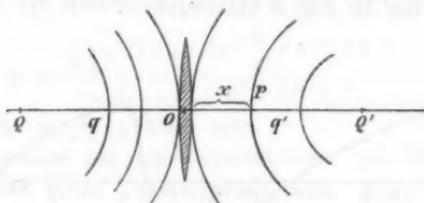


Fig. 11.

(wobei  $Q'$  der nach den Regeln der geometrischen Optik definierte Bildpunkt von  $Q$  im Abstande  $q'$  von  $O$  ist), so können wir, nach (12), unter Vernachlässigung der Beugung, in  $P$  setzen:

$$(66) \quad \mathfrak{E}_{z1} = - \frac{4\pi^2 a'}{\lambda^2(q'-x)} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{q'-x}{\lambda} \right),$$

wo, da die Linse unendlich dünn ist,

$$(67) \quad a' = -a \frac{q'}{q} \text{ ist.}$$

Wir haben also nur  $q$  in  $(-q')$  zu verwandeln und  $a$  in  $a'$ , um von der beugungsfreien, von  $Q$  divergierenden, Kugelwelle zur beugungsfreien, durch die Wirkung der Linse nach  $Q'$  konvergierenden Kugelwelle überzugehen.

Nun kann man, falls die Beugung berücksichtigt wird, wie bekannt, nach Huygens die Erregung in  $P$  mit großer Näherung als hervorgerufen betrachten durch eine Superposition von Elementarkugelwellen, die von den Punkten der Öffnung ausgehen. Es ist daher statthaft, die oben aufgestellte Ver-

wandlungsregel (für die Abbildung beugungsfreier Kugelwellen durch eine dünne Linse) auch auf den hier vorliegenden Fall der Beugung auszudehnen; d. h.: man darf der streng geometrischen Abbildung einfach die Beugungerscheinung überlagern.

Tut man dies, so folgt, analog wie (66) aus (65) hervor-  
ging, aus (59):

$$(68) \quad (\mathcal{E}_{z1})_P = -\frac{4\pi^2 C'}{\lambda^2(q' - x)} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{q' - x}{\lambda} \right) + \delta_0 \right].$$

Dabei ist

$$(69) \quad C' = -C_0 \frac{q'}{q}$$

und es sind  $C_0$  und  $\delta_0$  aus den beiden Gleichungen definiert,  
die aus (60) durch Vertauschung von  $q$  mit  $(-q')$  hervorgehen.

Also:

$$\begin{aligned} C_0 \cos \delta_0 = a \left\{ (1 - \cos u_0) \left[ 1 + \frac{\lambda^2}{8\pi^2(q' - x)} \frac{2q'x^3 - 6x^3 - q'^2x + 3q'^3}{q'^2x^3} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{5}{4} \frac{q_0^2}{q'^2} - \frac{3}{4} \frac{q_0^2}{x^2} \right] \right. \\ \left. - \frac{\lambda}{4\pi} \sin u_0 \left[ \frac{(q'+x)^3 + 3x^2 + q'^2}{q'x(q'-x)} + \frac{q_0^2}{2} \frac{2q'x^3 - 6x^3 - q'^2x + 3q'^3}{q'^2x^3} \right] \right. \\ \left. + \left[ \frac{5}{4} \frac{q_0^2}{q'^2} + \frac{3}{4} \frac{q_0^2}{x^2} \right], \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_0 \sin \delta_0 = a \left\{ \sin u_0 \left[ 1 + \frac{\lambda^2}{8\pi^2(q' - x)} \frac{2q'x^3 - 6x^3 - q'^2x + 3q'^3}{q'^2x^3} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{5}{4} \frac{q_0^2}{q'^2} - \frac{3}{4} \frac{q_0^2}{x^2} \right] \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{4\pi} (1 - \cos u_0) \left[ \frac{(q'+x)^3 + 3x^2 + q'^2}{q'x(q'-x)} + \frac{q_0^2}{2} \frac{2q'x^3 - 6x^3 - q'^2x + 3q'^3}{q'^2x^3} \right] \right. \\ \left. - \frac{\lambda q_0^2}{8\pi} \frac{2q'x^3 - 6x^3 - q'^2x + 3q'^3}{q'^2x^3} \right\}. \end{aligned}$$

Dabei hat  $u_0$  hier den Wert:

$$(71) \quad u_0 = \frac{\pi q_0^2}{\lambda} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{q'} \right).$$

Wir betrachten vorläufig nur die Punkte  $P$ , die vor dem Bildpunkt  $Q'$  liegen, für die also  $x < q'$  ist. Wir setzen fest:

$$(72) \quad C_0 > 0.$$

Dann ist durch die beiden Gleichungen (70) der Quadrant und Verlauf von  $\delta_0$  bestimmt. Die Formel (68) gibt uns für

Punkte  $P$ , deren Abstand von  $Q'$  groß ist gegen  $\lambda$ , das allein ausschlaggebende Glied der elektrischen Kraft.

Der Verlauf von  $\delta_0$  gestaltet sich für Punkte von  $Q'$ , von kleinen Abweichungen abgesehen, wie der von  $\delta$ . Im Bildpunkt  $Q'$  selbst ist  $x = q'$  daher nach (71)  $u_0 = 0$  und es wird nach (70), wie eine leichte Rechnung zeigt:

$$C_0 \sin \delta_0 = 0,$$

$$C_0 \cos \delta_0 = 0.$$

Es erscheint also  $\operatorname{tg} \delta_0$  in der unbestimmten Form 0/0. Berechnet man den „wahren Wert“ von  $\operatorname{tg} \delta_0$ , so folgt:

$$(\operatorname{tg} \delta_0)_e = q' = \frac{1 - \frac{q_0^3}{q'^2}}{\frac{1}{\lambda} \frac{q_0^2}{4\pi q'^3}} = 8\pi \frac{q'}{\lambda} \cdot \frac{q'^2}{q_0^2} \left(1 - \frac{q_0^3}{q'^2}\right)$$

oder annähernd

$$(73) \quad (\operatorname{tg} \delta_0)_{Q'} = 8\pi \frac{q'}{\lambda} \cdot \frac{q'^2}{q_0^2}.$$

Der rechts stehende Wert ist so ungeheuer groß im vorliegenden Falle, daß wir mit großer Annäherung setzen können:

$$(74) \quad \delta_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Von der  $Q'$  am nächsten liegenden Nullstelle von  $\delta_0$ , die sich in der Nähe der Stelle

$$(75) \quad x = -\frac{q'}{1 + \frac{\lambda q'}{q_0^2}}$$

befindet, wächst  $\delta_0$  allmählich bis zum Werte  $\pi/2$  an, der im Bildpunkt  $Q'$  erreicht wird.

Wie gestaltet sich nun der weitere Verlauf von  $\delta_0$  für Punkte hinter dem Brennpunkt, für die also  $x > q'$  ist?

Nach (68) und (69) folgt in diesem Falle:

$$(76) \quad (\mathfrak{E}_{z1})_P = -\frac{4\pi^2 \sqrt{C_0^3} q'}{q \lambda^3 (x - q')} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x - q'}{\lambda} \right) + \delta_0 \right].$$

Für Punkte  $P$  vor dem Bildpunkt hatten wir in (72) als Wurzel von  $C_0^3$  den positiven Wert frei gewählt, wodurch sich dann der Quadrant von  $\delta_0$  eindeutig fixierte. Hier sind wir daher in der Wahl des Wurzelwertes nicht mehr frei, sondern müssen auf die oben abgeleiteten Resultate der Maxwellsschen Theorie

zurückgreifen, die uns im Falle nicht vorhandener Beugung die Beziehung der Vektoren  $\mathfrak{E}_{z_1}$  vor und hinter dem Brennpunkt vorschreibt.

Diese Beziehung war durch (26) gegeben, wonach in entsprechenden Punkten diesseits und jenseits des Brennpunktes  $\mathfrak{E}$  verschiedenes Vorzeichen hatte, wenn die Punkte um ganze Vielfache der Wellenlänge vom Brennpunkt entfernt lagen, und ihr (gleicher) Abstand vom Brennpunkt sehr groß war gegen  $\lambda$ .

Es folgt hieraus unmittelbar, daß man in (76) für  $\sqrt{C_0^2}$  den positiven Wert  $+C_0$  nehmen muß, um mit den Forderungen der Maxwell'schen Theorie im Einklang zu sein.

Es wird daher auch hinter dem Bildpunkt  $Q'$  die Phasen anomalie  $\delta_0$  durch die beiden Gleichungen (70) bestimmt.

Da nun für die Punkte hinter dem Bildpunkt  $Q'$  nach (71)  $\nu_0$  negative Werte annimmt, so erkennt man sofort, daß  $\delta_0$  im Bildpunkt selbst einen Sprung um  $\pi$ , von  $\pi/2$  nach  $(-\pi/2)$  macht (genauer von  $\pi/2 - \epsilon$  nach  $(-\pi/2 - \epsilon)$ , wo  $\epsilon$  klein ist), und nun im weiteren Verlauf ganz analoge Schwankungen um Null ausführt, wie vor dem Brennpunkt. Die Fig. 12 gibt etwa den Verlauf von  $\delta_0$ .

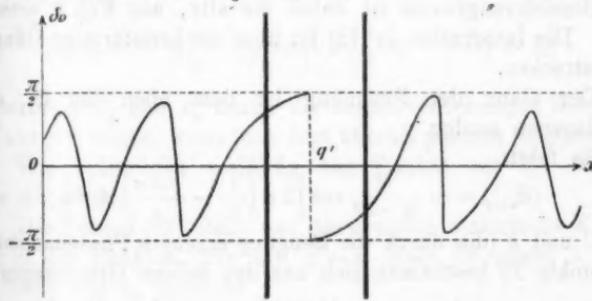


Fig. 12.

Nun gibt uns  $\mathfrak{E}_{z_1}$  das allein ausschlaggebende Glied von  $\mathfrak{E}$ , so lange  $|q' - x|$  groß ist gegen  $\lambda$ . Wenn wir also in Fig. 12 durch die beiden dicken Linien das Gebiet ausschalten, wo die Bedingung  $|q' - x|$  groß gegen  $\lambda$  nicht mehr erfüllt ist, so haben wir in der  $\delta_0$ -Kurve bis an dieses Gebiet heran den tatsächlichen Verlauf der Phasen anomalie, die im elektrischen Vektor  $\mathfrak{E}$  infolge der Beugung auftritt.

Wollen wir aber bis in die Nachbarschaft des Bildpunktes  $Q'$  vordringen, so müssen wir den Einfluß der Beugung auch auf die anderen Glieder von  $\mathfrak{E}$ , insbesondere  $\mathfrak{E}_{z3}$ , berechnen.

Es war

$$(77) \quad \mathfrak{E}_{z3} = -\frac{a(1-3\cos^2\theta)}{r_1^3} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right)$$

im Punkte  $P'$  (vgl. Fig. 8), oder

$$(77a) \quad \mathfrak{E}_{z3} = -a \frac{\frac{3}{4}x'^3}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{5/2}} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}{\lambda} \right),$$

wo  $x', y', z'$  die Koordinaten von  $P'$  sind.

Der Einfluß der beugenden Öffnung auf diese Welle ist derart, daß in  $P$  (vgl. Fig. 8)  $\mathfrak{E}_{z3}$  den Wert annimmt

$$(78) \quad (\mathfrak{E}_{z3})_P = \frac{1}{4\pi} \int d\sigma \Omega_\nu,$$

wo

$$(79) \quad \Omega_\nu = \left\{ \mathfrak{E}_{z3} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{E}_{z3}}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial \nu} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{E}_{z3}}{\partial \nu} \right\}_{t=\frac{r}{c}}.$$

Die Bezeichnungsweise ist dabei die alte, aus Fig. 8 ersichtliche. Die Integration in (78) ist über die kreisförmige Öffnung zu erstrecken.

Der Gang der Rechnung ist dem oben bei  $\mathfrak{E}_{z1}$  eingeschlagenen analog.

Es folgt:

$$(80) \quad (\mathfrak{E}_{z3})_P = -\frac{C}{(q+x)^3} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{q+x}{\lambda} \right) + \delta \right].$$

$C$  und  $\delta$  (die durch die Beugung erzeugte Phasenomalie im Punkte  $P$ ) bestimmen sich aus den beiden Gleichungen:

$$(81) \quad \left\{ \begin{aligned} C \cos \delta &= a \left\{ (1-\cos u_0) \frac{(q+x)^3}{q^3} \left[ 1 - \left( \frac{3}{4} \frac{q_0^2}{x^2} + \frac{13}{4} \frac{q_0^2}{q^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3}{8} \frac{\lambda^2}{\pi^2(q+x)} \frac{q^8+x^2 q^6+2 x^4 q+10 x^2}{x^3 q^3} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda}{4\pi x q^3} \sin u_0 \left[ (q+x)(2 q^2+10 x^2-4 q x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3}{2} \frac{q_0^2}{q^3} (q+x)^2 \frac{q^8+x^2 q^6+2 x^4 q+10 x^2}{x^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{(q+x)^2}{q^2} \left( \frac{3}{4} \frac{q_0^2}{x^2} + \frac{13}{4} \frac{q_0^2}{q^2} \right) \right\}, \end{aligned} \right.$$

$$(81) \quad \left\{ \begin{aligned} C \sin \delta = a & \left\{ \sin v_0 \frac{(q+x)^3}{q^2} \left[ 1 - \left( \frac{3}{4} \frac{q_0^2}{x^2} + \frac{13}{4} \frac{q_0^2}{q^2} \right) \right. \right. \\ & + \frac{3}{8} \frac{\lambda^2}{\pi^2(q+x)} \frac{q^3 + xq^2 + 2x^2q + 10x^3}{x^2q^2} \Big] \\ & + \frac{\lambda}{4\pi x q^2} (1 - \cos u_0) \left[ (q+x)(2q^2 + 10x^2 - 4qx) \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{2} \frac{q_0^2}{q^2} (q+x)^2 \frac{q^3 + xq^2 + 2x^2q + 10x^3}{x^2} \right] \\ & \left. - \frac{3}{8} \frac{\lambda q_0^2}{\pi q^2} (q+x)^3 \frac{q^3 + xq^2 + 2x^2q + 10x^3}{x^2q^2} \right\}. \end{aligned} \right.$$

$u_0$  hat dabei die in (54) gegebene Bedeutung.

Wir wollen den Verlauf von  $\delta$  nach diesen Formeln nicht diskutieren, sondern gleich zu der Abbildung durch unsere Linse übergehen.

Ganz analog wie bei  $\mathfrak{E}_{z1}$  stellen wir diese Abbildung in der Rechnung dar, indem wir  $q$  durch  $(-q')$  ersetzen und  $C$  durch  $(-C_0 \frac{q'^3}{q^3})$ .  $q'$  ist dabei die Entfernung des Bildpunktes  $Q'$  von  $O$ , dem Mittelpunkt der Blende.

Es folgt dann aus (80)

$$(82) \quad (\mathfrak{E}_{z3})_P = - \frac{C_0 q'^3}{q^3 (q' - x)^3} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{q' - x}{\lambda} \right) + \delta_0 \right].$$

Dabei sind  $C_0$  und  $\delta_0$  durch die beiden Gleichungen bestimmt, die aus (81) folgen, wenn man dort überall  $q$  durch  $(-q')$  ersetzt.

Wir betrachten vorläufig nur Punkte vor  $Q'$ , für die also  $x < q'$  ist.

Die Formel (82) stellt uns die gesamte elektrische Kraft  $\mathfrak{E}$  dar in den Punkten, für die  $|q' - x|$  klein ist gegen  $\lambda$ . Das an Stelle von  $u_0$  tretende

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{\pi q_0^2}{\lambda} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{q'} \right) \\ &= \frac{\pi q_0^2}{x q'} \cdot \frac{q' - x}{\lambda} \end{aligned}$$

ist daher dort klein, so daß man setzen kann:

$$\cos v_0 = 1,$$

$$\sin v_0 = v_0.$$

Die beiden  $C_0$  und  $\delta_0$  bestimmenden Gleichungen werden daher:

$$(83) \quad \begin{cases} C_0 \cos \delta_0 = \frac{a(q' - x)^3}{4q'^2} \left\{ \frac{\varrho_0^2}{x^2} + 3 \frac{\varrho_0^2}{q'^2} - 4 \frac{\varrho_0^2}{q' x} \right\}, \\ C_0 \sin \delta_0 = \frac{a \pi \varrho_0^2 (q' - x)^3}{\lambda x q'^5}. \end{cases}$$

Aus diesen beiden Gleichungen und der Festsetzung, daß für Punkte vor  $Q'$

$$(84) \quad C_0 > 0$$

sein soll, ist der Verlauf von  $\delta_0$  in der unmittelbaren Nachbarschaft des Bildpunktes eindeutig bestimmt. Wir können schreiben:

$$(83a) \quad \begin{cases} C_0 \cos \delta_0 = \frac{a(q' - x)^3}{4q'^2} \varrho_0^2 \left\{ \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{q'} \right)^3 - \frac{2}{q'} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{q'} \right) \right\} \\ \quad = \frac{a(q' - x)^3}{4q'^2} \varrho_0^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{q'} \right) \left( \frac{1}{x} - \frac{3}{q'} \right). \end{cases}$$

Da nun  $q' - x$  positiv und klein gegen  $\lambda$  ist, so ist  $a$  fortiori  $(q' - x)$  klein gegen  $2x$  und daher  $q' - 3x < 0$ . Es ist also in der Nähe des Brennpunktes:

$$\begin{aligned} \sin \delta_0 &> 0, \\ \cos \delta_0 &< 0, \end{aligned}$$

d. h.  $\delta_0$  liegt im zweiten Quadranten.

Bildet man nach (83)  $\operatorname{tg} \delta_0$ , so erhält man nach leichten Reduktionen

$$\operatorname{tg} \delta_0 = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot \frac{xq'}{q' - 3x}$$

oder

$$(85) \quad \operatorname{tg} \delta_0 = - \frac{2\pi q'}{\lambda} \left( 1 + \frac{q' - x}{2x} \right).$$

$\delta_0$  liegt daher dem Werte  $\pi/2$  sehr nahe.

Im Bildpunkt  $Q'$  ist

$$(86) \quad \operatorname{tg}(\delta_0)_{Q'} = - \frac{2\pi q'}{\lambda}.$$

Nimmt man z. B.

$$q' = 5 \cdot 10^3 \text{ mm},$$

$$\lambda = 5 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$$

und setzt  $\delta_0 = (\pi/2) + \varepsilon$ , so würde

$$\varepsilon < 1'$$

sein.

Wie ist nun der weitere Verlauf von  $\delta_0$  hinter dem Bildpunkt, also für  $x > q'$ ?

Nach (82) ist für die Punkte hinter  $Q'$

$$(87) \quad (\mathcal{E}_{z3})_P = \frac{\sqrt{C_0^3} q'^3}{q^3 (x - q')^3} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x - q'}{\lambda} \right) + \delta_0 \right].$$

Wir hatten für die Punkte vor  $Q'$  festgesetzt, daß

$$\sqrt{C_0^3} = + C_0$$

sein solle.

Hier, für die Punkte hinter  $Q'$ , sind wir daher in der Wahl des Wurzelwertes nicht mehr frei, sondern müssen auf die Ergebnisse der Maxwellschen Theorie zurückgreifen.

Nun hatten wir am Schlusse von § 1 das Resultat gewonnen, daß an zwei entsprechenden, in gleicher Entfernung vor und hinter dem Brennpunkt liegenden, Punkten die elektrische Kraft annähernd entgegengesetzt gleiche Werte hat, wenn die Entfernungen der Punkte vom Brennpunkt klein sind gegen die Wellenlänge und wenn  $t = aT$  ist, d. h. wenn man nach Verlauf ganzzahliger Vielfacher der Periode  $T$  beobachten würde. Hieraus und durch Vergleich von (87) mit (82) folgt, daß man für die Punkte hinter  $Q'$

$$\sqrt{C_0^3} = + C_0$$

zu setzen hat, um, im Falle der Vernachlässigung der Beugung, mit der Maxwellschen Theorie im Einklange zu sein. Es wird also auch hinter  $Q'$  die Phasenanomalie  $\delta_0$  durch die beiden Beziehungen (83) definiert. Daher ist hinter dem Bildpunkt:

$$\sin \delta_0 < 0,$$

$$\cos \delta_0 > 0,$$

d. h.  $\delta_0$  liegt im  $(-1)^{\text{ten}}$  Quadranten.

Im Bildpunkt  $Q'$  selbst springt  $\delta_0$  von nahezu  $+\pi/2$  um  $\pi$  nach nahezu  $(-\pi/2)$ , wie es Fig. 13 zeigt.

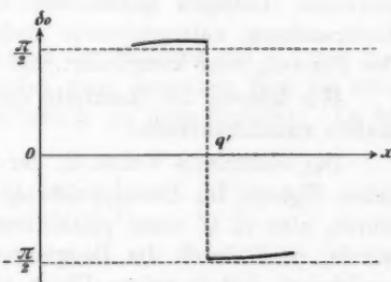


Fig. 13.

Der Wert von  $\mathfrak{E}_{z3}$  im Bildpunkt  $Q'$  folgt leicht aus (82) und (83). Es ist mit großer Annäherung

$$(88) \quad (\mathfrak{E}_{z3})_{Q'} = + \frac{\pi a \varrho_0^3}{q^3 Q' \lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Vergleicht man dieses Resultat mit dem aus (39) folgenden Wert von  $\mathfrak{E}_z$  im Falle der vollständig um den Brennpunkt geschlossenen (beugungslosen) Welle:

$$(89) \quad (\mathfrak{E}_z)_{Q'} = \frac{32 a \pi^3}{3 \lambda^5} \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

so erkennt man, daß die Amplitude, wie es zu erwarten ist, im Falle der Beugung sehr viel kleiner ist als in dem durch (89) dargestellten beugungslosen Fall. Die Phase scheint in beiden Fällen übereinzustimmen, d. h. im Falle der Beugung keine Anomalie aufzuweisen. Indessen ist zu bedenken, daß der in (89) enthaltene Wert, infolge der Vollständigkeit der Wellen rings um den Brennpunkt, durch die Übereinanderlagerung der nach dem Brennpunkt konvergierenden und der vom Brennpunkt nach außen divergierenden Wellen gebildet ist. Die beiden Ausdrücke (88) und (89) sind also im Wesen verschieden.

Wir haben bisher nur Punkte betrachtet, deren Entfernung von  $Q'$  groß oder klein gegen  $\lambda$  war. Im ersten Falle wird  $\mathfrak{E}$  durch  $\mathfrak{E}_{z1}$ , im zweiten durch  $\mathfrak{E}_{z3}$  dargestellt. Es existieren also noch gewisse Übergangsgebiete, in denen man  $\mathfrak{E}$  nicht mehr durch  $\mathfrak{E}_{z1}$  oder  $\mathfrak{E}_{z3}$  allein darstellen kann; man muß dort noch auf  $\mathfrak{E}_{z2}$  Rücksicht nehmen und die drei Wellen superponieren. Indessen haben diese Gebiete für die vorliegende Untersuchung untergeordnete Bedeutung; auch werden dort die Formeln sehr kompliziert und unübersichtlich.

Wir können die Resultate dieses Paragraphen folgendermaßen zusammenfassen:

Der elektrische Vektor  $\mathfrak{E}$ , der nach der reinen Maxwell'schen Theorie im Brennpunkte  $Q'$  sein Vorzeichen umkehren würde, also in  $Q'$  einen plötzlichen Phasenzuwachs  $\pi$  erhalten würde, wird durch die Beugungswirkung der Blende *derart* modifiziert, daß in seiner Phase eine additive „Anomalie“  $\delta_0$  auftritt. Diese Anomalie macht in  $Q'$  selbst einen Sprung

(82) um  $-\pi$ , der den von der Maxwell'schen Theorie geforderten einfache aufhebt. Die Phase des Vektors  $\mathfrak{E}$  scheint demnach im Brennpunkt stetig zu verlaufen. In Entfernung vom Brennpunkt, die groß sind gegen die Wellenlänge  $\lambda$ , führt die Anomalie  $\delta_0$  vor und hinter dem Brennpunkt Schwankungen um die Nullage aus, die um so kleiner und enger werden, je mehr man sich vom Brennpunkt entfernt. Da nun nach der Maxwell'schen Theorie der ungestörte elektrische Vektor  $\mathfrak{E}$  vor und hinter dem Brennpunkt in großen Entfernung verschiedene Vorzeichen hat, so wird das beobachtbare Resultat darin bestehen, daß in großer Entfernung vor und hinter dem Brennpunkt die Phase des elektrischen Vektors im Mittel um  $\pi$  verschieden ist (Gouy).

#### § 4.

Wir wollen in diesem Paragraphen den Einfluß der Beugung auf die magnetische Kraft  $\mathfrak{H}$  berechnen.

Es ist nach (12) die auf die Linse und Blende auffallende, von  $Q$  aus divergierende  $\mathfrak{H}$ -Welle:

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_e &= \sqrt{\mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{H}_y^2} = \frac{\sin \vartheta}{c^2 r_1} \varphi'' \left( t - \frac{r_1}{c} \right) + \frac{\sin \vartheta}{c r_1^2} \varphi' \left( t - \frac{r_1}{c} \right) \\ &= \mathfrak{H}_{e1} + \mathfrak{H}_{e2}.\end{aligned}$$

Setzt man wieder

$$\varphi(t) = a \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

so ist:

$$(90) \quad \begin{cases} \mathfrak{H}_{e1} = -\frac{4\pi^2 a \sin \vartheta}{\lambda^2 r_1} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right), \\ \mathfrak{H}_{e2} = -\frac{2\pi a \sin \vartheta}{\lambda r_1^2} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right). \end{cases}$$

Wir behandeln den Einfluß der Beugung auf  $\mathfrak{H}_{e1}$  und  $\mathfrak{H}_{e2}$  getrennt. Beschreiten wir dabei ganz denselben Weg wie oben bei  $\mathfrak{E}$ , so gelangen wir schließlich zu dem Resultat: Es ist für  $x < q'$

$$(91) \quad (\mathfrak{H}_{e1})_P = -\frac{4\pi^2 C_0 q'}{\lambda^2 q (q' - x)} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{q' - x}{\lambda} \right) + \delta_0 \right],$$

für  $x > q'$ , also hinter  $Q'$

$$(92) \quad (\mathfrak{H}_{e1})_P = +\frac{4\pi^2 C_0 q'}{\lambda^2 q (x - q')} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x - q'}{\lambda} \right) + \delta_0 \right],$$

wo  $C_0$  und  $\delta_0$  sich aus den beiden Gleichungen bestimmen:

$$(93) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_0 \cos \delta_0 = a \left\{ (1 - \cos v_0) \left[ 1 + \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \frac{6q'^3 - 2xq'^2 + 3x^2q' - 9x^3}{(q'-x)x^3q'^3} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \left( \frac{3}{4} \frac{q_0^2}{x^2} + \frac{q_0^2}{q'^2} \right) \right] \right. \\ \left. - \frac{\lambda}{4\pi} \sin v_0 \left[ \frac{(q'+x)^3 + q'^2 + 2x^2}{q'x(q'-x)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{q_0^2}{4} \frac{6q'^3 - 2xq'^2 + 3x^2q' - 9x^3}{x^3q'^3} \right] \right. \\ \left. + \left( \frac{3}{4} \frac{q_0^2}{x^2} + \frac{q_0^2}{q'^2} \right) \right\}, \\ C_0 \sin \delta_0 = a \left\{ \sin v_0 \left[ 1 + \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \frac{6q'^3 - 2xq'^2 + 3x^2q' - 9x^3}{(q'-x)x^3q'^3} \right. \right. \\ \left. \left. - \left( \frac{3}{4} \frac{q_0^2}{x^2} + \frac{q_0^2}{q'^2} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{4\pi} (1 - \cos v_0) \left[ \frac{(q'+x)^3 + q'^2 + 2x^2}{q'x(q'-x)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{q_0^2}{4} \frac{6q'^3 - 2xq'^2 + 3x^2q' - 9x^3}{x^3q'^3} \right] \right. \\ \left. - \frac{\lambda q_0^2}{16\pi} \frac{6q'^3 - 2xq'^2 + 3x^2q' - 9x^3}{x^3q'^3} \right\}. \end{array} \right.$$

Dabei ist

$$(94) \quad v_0 = \frac{\pi q_0^2}{\lambda} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{q'} \right).$$

Der Verlauf, den  $\delta_0$  nach diesen Formeln annimmt, ist, mit geringen Unterschieden, derselbe wie oben im Falle von  $\mathfrak{E}_{z_1}$ . Auch hier springt in  $Q'$  selbst  $\delta_0$  von  $(\pi/2) - \varepsilon$  nach  $-(\pi/2) - \varepsilon$ , wo  $\varepsilon$  sehr klein ist.

Die Formeln (91) und (92) geben uns das ausschlaggebende Glied der magnetischen Kraft  $\mathfrak{H}$  für die Punkte, für die  $|q' - x|$  groß ist gegen  $\lambda$ .

Ist dagegen  $|q' - x|$  klein gegen  $\lambda$ , so wird  $\mathfrak{H}$  durch  $\mathfrak{H}_{z_2}$  allein dargestellt, und der Einfluß der Beugung auf diese Welle liefert uns das folgende Resultat:

Es ist für  $x < q'$ , also für die Punkte  $P$  vor  $Q'$

$$(95) \quad (\mathfrak{H}_{z_2})_P = - \frac{2\pi C_0 q'^2}{q^2 \lambda (q' - x)^3} \sin \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{q' - x}{\lambda} \right) + \delta_0 \right].$$

Für  $x > q'$ , d. h. für Punkte  $P$  hinter  $Q'$ , ist

$$(96) \quad (\mathfrak{H}_{22})_P = -\frac{2\pi C_0 q'^2}{q^2 \lambda (x - q')^2} \sin \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x - q'}{\lambda} \right) + \delta_0 \right].$$

Dabei ist, unter Benutzung von (94) und Beachtung, daß  $v_0$  hier sehr klein ist,

$$(97) \quad \begin{cases} + C_0 \cos \delta_0 = -\frac{a \lambda^2 x v_0^2}{4\pi^2 q' q_0^2}, \\ + C_0 \sin \delta_0 = a \frac{\lambda x v_0^2}{\pi q_0^2}. \end{cases}$$

Es ist also:

$$(98) \quad \delta_0 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon,$$

wo  $\varepsilon$  sehr klein ist. In  $Q'$  verläuft also  $\delta_0$  stetig.

Fassen wir die Resultate dieses Paragraphen zusammen, so können wir sagen:

Der magnetische Vektor  $\mathfrak{H}$ , der nach der reinen Maxwell'schen Theorie im Brennpunkt  $Q'$  stetig verläuft, wird durch die Beugungswirkung der Blende *derart* modifiziert, daß in seiner Phase eine additive „Anomalie“  $\delta_0$  auftritt. Diese Anomalie verläuft in  $Q'$  stetig. Es verläuft daher die Phase des Vektors  $\mathfrak{H}$  im Brennpunkt stetig.

In Entfernungen vom Brennpunkt, die groß sind gegen die Wellenlänge  $\lambda$ , ist im Mittel die Phase von  $\mathfrak{H}$  hinter dem Brennpunkt um  $\pi$  gegen die Phase von  $\mathfrak{H}$  vor dem Brennpunkt verschoben.

#### Zusammenfassung.

Die Resultate der vorliegenden Arbeit sind folgende:

I. Als „leuchtender Punkt“ wurde ein geradlinig schwingendes Elektron angenommen. Werden die von einem solchen „leuchtenden Punkt“ ausgehenden Kugelwellen durch irgend einen Mechanismus zum Konvergieren gebracht und bilden dabei einen Brennpunkt, so ist das elektromagnetische Feld in diesem Brennpunkt endlich.

II. Betrachtet man dabei die nach dem Brennpunkt hinauf laufenden Wellen und die vom Brennpunkt auslaufenden gesondert, so kann man sagen, daß der elektrische Vektor im Brennpunkt sein Vorzeichen wechselt, daß dagegen der magnetische dort stetig verläuft.

III. Diese Verhältnisse werden, falls z. B. eine Linse die Bildung des Brennpunktes bewirkt, durch die Beugung an der das System begrenzenden Blende derart modifiziert, daß beide Vektoren im Brennpunkt stetig zu sein scheinen.

Breslau, Physik. Institut der Universität, im März 1909.

(Eingegangen 22. März 1909.)

**2. Die Verdampfungswärme des Wassers  
zwischen 100 und 180° C.;  
von F. Henning.**

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

**Einleitung.**

Die Versuche über die Verdampfungswärme des Wassers zwischen 100 und 180°, wie sie in der vorliegenden Arbeit mitgeteilt werden, bilden die Fortsetzung der bereits früher<sup>1)</sup> zwischen 30 und 100° angestellten Beobachtungen.

Die Werte für die Verdampfungswärme des Wassers oberhalb 100° hat man bisher stets aus den Regnaultschen<sup>2)</sup> Messungen der Gesamtwärme hergeleitet. Regnault kondensierte in 10—20 Minuten 1—1,5 kg gesättigten Dampf und bediente sich zur Beobachtung des dabei frei werdenden Wärmequantums abwechselnd zweier gleich großer Kalorimeter von 65 Liter Inhalt, die sich auf Zimmertemperatur befanden. Während der Dampf sich in dem einen kondensierte, wurde an dem anderen die Korrektion wegen des Wärmeaustausches mit der Umgebung bestimmt. Die verdampfte Menge ermittelte er durch Wägen des Kondensates.

Die Gesamtwärme setzt sich additiv zusammen aus der Verdampfungswärme und dem Wärmeinhalt des Wassers zwischen der Temperatur des gesättigten Dampfes und 0°. Bei den höheren Temperaturen macht die Wasserwärme einen sehr erheblichen Bruchteil (bei 180° etwa 27 Proz.) der beobachteten Gesamtwärme aus. In der erwähnten früheren Abhandlung habe ich die Wasserwärme nach den Versuchen von Dieterici<sup>3)</sup> in Rechnung gesetzt und die so aus den Regnaultschen Beobachtungen abgeleiteten Verdampfungswärmern

1) F. Henning, Ann. d. Phys. 21. p. 849—878. 1906.

2) V. Regnault, Ré. des expér. 1. p. 635—728. 1847.

3) C. Dieterici, Ann. d. Phys. 16. p. 610. 1905.

mit meinen direkten Messungen verglichen. Bei  $100^{\circ}$  erwiesen sich die Beobachtungen Regnaults um 3—4 Promille zu klein und es wurde vermutet, daß ähnliche Abweichungen, die durchaus innerhalb der Grenze seiner Beobachtungsgenauigkeit liegen, auch oberhalb  $100^{\circ}$  vorhanden sein könnten.

Regnault erzeugte den Dampf durch Kohlenfeuerung, wodurch nicht diejenige Gleichmäßigkeit im Sieden der Flüssigkeit erreicht werden kann, wie es die heute leicht anwendbare elektrische Heizung gestattet. Auch seine kalorimetrische Messung ist nicht in jeder Beziehung einwandfrei. Sie wurde zu einer Zeit ausgeführt, zu der man die spezifische Wärme des Wassers in seiner Abhängigkeit von der Temperatur noch nicht richtig erkannt hatte. Ferner scheinen ihm auch die Korrekturen der Quecksilberthermometer, mit denen die Temperaturerhöhungen der Kalorimeter gemessen wurden, nicht mit der jetzt erreichbaren Genauigkeit bekannt gewesen zu sein.

Wenn es sich darum handelt, für die Verdampfungswärme, deren Kenntnis zu wichtigen theoretischen Betrachtungen notwendig ist, Werte aufzustellen, so muß man zu dem Schluß kommen, daß die Regnaultschen Messungen der Gesamtwärme dazu nicht mehr ausreichen, auch wenn man von der Forderung absieht, daß eine so wichtige Konstante nur durch eine einheitliche Messung ermittelt werden sollte. Direkt ist die Verdampfungswärme des Wassers oberhalb  $100^{\circ}$  nur von A. Franc<sup>1)</sup> bestimmt worden. Die Resultate seiner Beobachtungen, die sich von  $100$ — $170^{\circ}$  erstrecken, weichen aber infolge ungünstiger Versuchsbedingungen von den Regnaultschen Werten bis 6 Proz. ab. Andere Versuche, aus denen sich die Verdampfungswärme des Wassers oberhalb  $100^{\circ}$  herleiten ließe, liegen meines Wissens nicht vor.

Die theoretische Bedeutung der Verdampfungswärme besteht darin, daß man aus ihr und dem jetzt gut bekannten Sättigungsdruk des Wasserdampfes<sup>2)</sup> mittels der Clapeyronischen Formel das spezifische Volumen des gesättigten Dampfes

1) A. Franc, Zeitschr. d. Ver. Deutscher Ing. 1891. p. 979—983, 1036—1040, 1069—1075.

2) L. Holborn u. F. Henning, Ann. d. Phys. 26. p. 833—883. 1908.

herleiten kann. Eine neue Bestimmung der Verdampfungswärme liefert also sofort auch eine neue Bestimmung des spezifischen Volumens.

**Methode.**

Die Methode, nach der ich meine Messungen durchführte, ist dieselbe, die bereits für das Temperaturintervall 30—100° zur Anwendung gelangte. Es wurde die zur Verdampfung notwendige Wärme von einer stromdurchflossenen Heizspule geliefert und als elektrische Energie gemessen. Die verdampfte Wassermenge wurde durch Wägung des in einer Kühlvorlage wieder kondensierten Dampfes bestimmt. Die Temperatur, bei der die Verdampfung erfolgen sollte, konnte beliebig konstant gehalten werden durch Einstellen des Druckes, unter dem das Wasser siedete. Die Drücke betrugen bis zu 10 Atmosphären. Sie wurden erzeugt durch komprimierte Luft, die einer Bombe entnommen wurde und eingestellt mittels des früher<sup>1)</sup> beschriebenen 12 m langen offenen Quecksilbermanometers. Ein gleichförmig temperiertes Volum von 30 Litern, die künstliche Atmosphäre, die mit den Kühlvorlagen und dem Verdampfungsgefäß in Verbindung stand, diente zur Erhöhung der Konstanz des Druckes.

Die Vorteile, welche die eingeschlagene Methode zur Bestimmung der Verdampfungswärme vor der Methode Regnaults zur Beobachtung der Gesamtwärme voraus hat, sind schon in der früheren Arbeit erwähnt worden. Sie bestehen in der dauernden Temperaturkonstanz aller Teile der Meßanordnung, so daß das Thermometer während des Versuches im wesentlichen nur als Nullinstrument diente, in der Vermeidung der Vor- und Nachperiode und schließlich darin, daß nicht Fehler möglich waren, wie sie bei Regnault infolge von vorzeitiger Kondensation des Dampfes innerhalb der Rohrleitung zwischen Dampferzeuger und Kalorimeter zu befürchten waren. Diese Vorteile zeigen sich bei den höheren Siedetemperaturen, wo die Differenzen gegen die Zimmertemperatur erhebliche Beiträge annehmen, im verstärkten Maße. Bei Temperaturen über 100° hat meine Anordnung allerdings den Nachteil, daß sowohl das Verdampfungsgefäß wie alle Teile zwischen diesem

---

1) L. Holborn u. F. Henning, l. c.

und den Kondensgefäßen, zu denen besonders ein Hahn zu rechnen ist, vollkommen dampfdicht halten müssen, denn das im Verdampfungsgefäß gemessene Wärmequantum wird stets der im Kondensgefäß aufgefangenen Wassermenge zugeordnet. Bei Regnault ist die Gefahr einer Undichte von geringer Bedeutung, weil das Kondensat derjenigen Dampfmenge zur Wägung gelangt, die ihren Wärmeinhalt an das Kalorimeter abgegeben hat. Nun ist aber bei meiner Versuchsanordnung die Dichte des Apparates häufig durch eine Druckmessung mit dem sehr empfindlichen offenen Quecksilbermanometer kontrolliert worden und da Messungen nur bei günstigem Ergebnis der Prüfung vorgenommen wurden, so sind keine durch Undichten hervorgerufenen Fehler zu befürchten.

Ebenso wie früher ist die Spule, der die zum Verdampfen notwendige Wärme entnommen wird, isoliert in einen Metallmantel eingelötet und derartig rings von Wasser umgeben, daß alle von ihr abgegebene Energie durch das Wasser treten muß. Diese Energie wird mittels Kompensationsapparat, Drehspulengalvanometer und Kadmiumnormalelement zunächst in Wattsekunden gemessen, die aber einwandfrei in Kalorien umgerechnet werden können, da das Normalelement verglichen ist mit demjenigen Element, das die Herren Jaeger und v. Steinwehr<sup>1)</sup> bei ihren Vorversuchen über die spezifische Wärme des Wassers an die Kalorie von 15° angeschlossen haben. Es wurde ebenso wie früher eine Kalorie von 15° gleich 4,188 Wattsekunden gesetzt. Der Wert des Normallementes, der 1,0190 Volt betrug, spielt hierbei keine Rolle, da er einen Faktor darstellt, der sich bei der Umrechnung von Wattsekunde auf Kalorien völlig heraushebt. Bei der angestrebten Genauigkeit von 1 Promille in der Verdampfungswärme braucht die Vergleichung der Normalelemente nur auf 0,5 Promille sicher zu sein.

Die Umrechnung, die Hr. A. W. Smith<sup>2)</sup> mit meinen

1) Tätigkeitsbericht der Physikalisch - Technischen Reichsanstalt; Zeitschr. f. Instrumentenk. 25. p. 104. 1905.

2) A. W. Smith, Phys. Rev. 25. p. 145—170. 1907. Er beobachtet die Verdampfungswärme des Wassers zwischen 14 und 40°. Bei 30° erhält er gegen meine Resultate einen um 0,7 Promille größeren Wert, bei 40° ist die Übereinstimmung vollkommen.

Werten der Verdampfungswärme zwischen 30 und 100° vornimmt und bei der er zwischen dem Volt der Reichsanstalt und dem von ihm so genannten internationalen Volt unterscheidet, ist verfehlt.

Meine Methode erfordert die Möglichkeit, durch Umlegen eines Hahnes den Dampf nach Belieben zwei verschiedene Wege führen zu können, von denen der eine nach dem Einleiten und unmittelbar vor dem Abstellen der Verdampfung eingeschlagen wird, und der andere während der mittleren Periode, innerhalb deren alle Verhältnisse möglichst konstant gehalten werden können. Diese mittlere Periode dient allein zur Messung. Man hat ihre Dauer genau festzustellen, um die elektrische Energie berechnen zu können, die zur Entwicklung des während dieser Periode gebildeten Dampfes aufgewendet worden ist. Nennt man  $g$  die Masse dieses Dampfes in Gramm und  $K$  die Anzahl Kalorien, die zu seiner Entwicklung innerhalb des Verdampfungsgefäßes verbraucht sind, so ist die Verdampfungswärme  $L$  gegeben durch die Beziehung

$$(1) \quad K + k = g L,$$

wenn  $k$  die dem Wasser von außen durch Leitung oder Strahlung zugeführte Wärme bedeutet.  $k$  hat den Charakter einer Korrektionsgröße. Setzt man das Verdampfungsgefäß in einen gleichmäßig temperierten Mantel, so gelingt es, wenn man allen Versuchen die gleiche Dauer gibt,  $k$  sehr nahe konstant zu halten und man erhält, wenn man bei verschiedenen Versuchen  $K$  und damit  $g$  absichtlich ändert, beliebig viele Gleichungen der Form

$$K_1 + k = g_1 L,$$

$$K_2 + k = g_2 L,$$

• • • •

aus denen  $L$  und  $k$  berechnet werden können. Hiermit ist das Schema der Rechnung gegeben, die im Prinzip in der früheren Arbeit genau so durchgeführt wurde. Nur die Einzelheiten sind jetzt etwas verändert, auf sie wird weiter unten näher eingegangen.

#### Der Apparat.

Der Verdampfungsapparat ist mit einigen Abänderungen bereits bei den Versuchen über den Sättigungsdruck des Wasser-

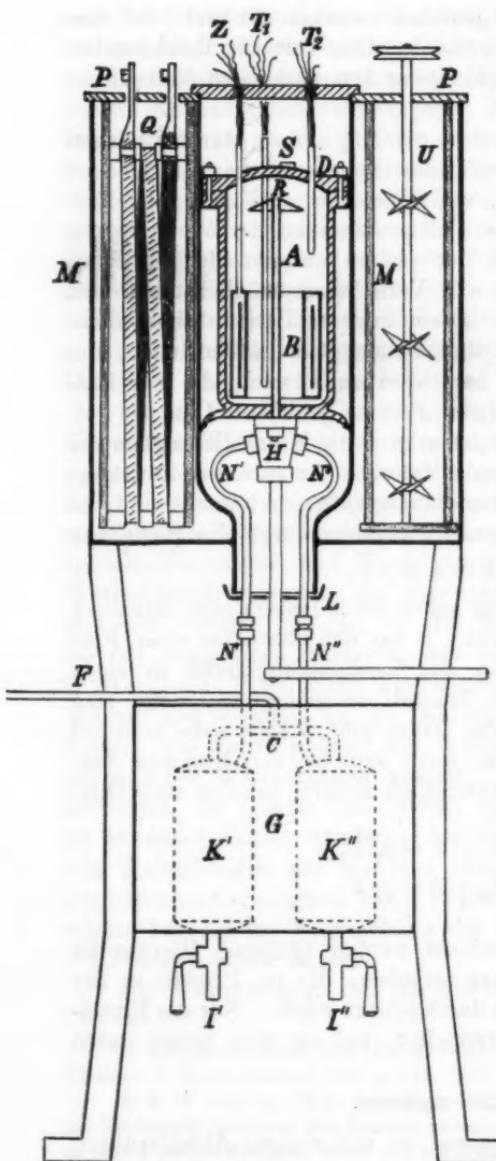


Fig. 1.

dampfes verwendet worden und auch zum Teil dort beschrieben.<sup>1)</sup> Gegenüber dem früheren Verdampfungsapparat wurden seine Dimensionen beträchtlich vergrößert, und seine Wandungen erheblich verstärkt, da er Druckunterschiede bis zu 10 Atm. aushalten mußte. Der Raum zur Erzeugung des Dampfes besteht (Fig. 1) aus einem Zylinder *A* aus Rotguß von 15 cm lichter Weite, 24 cm Höhe, 1 cm Wandstärke und etwa 5 Liter Inhalt. Sein Deckel *D* ist mit Schrauben auf den Flansch des Zylinders gepreßt, wobei ein in Nuten eingelegter Kupferring von quadratischem Querschnitt als Dichtung dient. Im Deckel befindet sich eine mit Blei abgedichtete Verschraubung *S* zum Einfüllen des Wassers. Außerdem ist er von drei Nickelröhren durchsetzt, die dampfdicht mit dem Deckel

1) L. Holborn und F. Henning, l. c.

verschraubt sind. Zwei der Rohre sind unten verschlossen und dienen zur Aufnahme der Platinthermometer  $T_1$  und  $T_2$ , die mit den Nummern 10 und 11 bezeichnet sind, das dritte Rohr enthält die Drähte  $Z$ , die zur Heizspule  $B$  führen.

Die Heizspule  $B$  (Figg. 1 u. 2) besteht aus 7,5 mm breitem Konstantanband, das auf einen ringförmigen Tonzyylinder von 12 cm Höhe, 11 cm Durchmesser und 5 mm Wandstärke parallel zu dessen Achse aufgewickelt ist. Um dem Konstantanband festen Halt zu geben, ist der Rand des Tonzyinders mit Einschnitten versehen worden, in die sich das Band hineinlegt. Der Strom wird der Spule zugeführt durch 2 mm dicke Kupferdrähte; sie sind gleichzeitig mit zwei dünneren Drähten, die zur Messung der Potentialdifferenz dienen, an die Enden der Spule mit Silber angelötet. Der Tonzyylinder nebst der Spule ist unter Anwendung von Glimmerisolation in einen Rotgußmantel gesetzt, der aus zwei zylindrischen Teilen verschiedenen Durchmessers besteht. Der weitere von ihnen besitzt an dem einen Ende einen nach innen, der engere einen nach außen vorspringenden Rand von etwa 2 cm Breite und beide sind, wie die Figur näher zeigt, unter Zwischenfügung des Tonzyinders derartig miteinander verschraubar, daß sie in zwei ringförmigen Flächen  $V$  und  $V'$ , in denen sie genau zusammen treffen, miteinander verlötet werden konnten. Der zusammengesetzte Rotgußzyylinder hat eine Höhe von 14,5 cm, einen inneren und äußeren Durchmesser von 7,7 bzw. 12,5 cm. Die Wandstärke beträgt etwa  $\frac{3}{4}$  cm. Um den Tonzyylinder nicht durch zu hohe Temperatur zu gefährden, ist die Zusammenfügung der beiden Teile des Rotgußzyinders nur durch Zinn erfolgt. Das Nickelrohr  $W$ , in dem die zur Spule führenden Drähte  $Z$  verlaufen, ist indessen zuvor mit dem einen Teil des

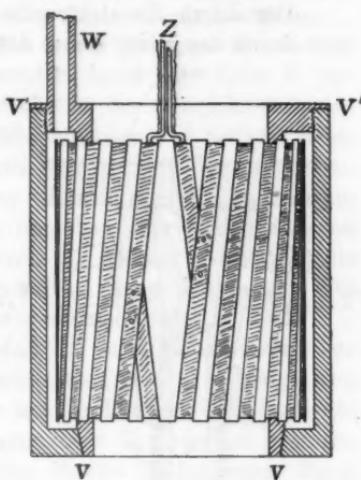


Fig. 2.

Rotgußzylinders hart verlötet worden. In Fig. 2 ist der innere Teil der Spule in Ansicht dargestellt und um  $90^\circ$  gegen den im Querschnitt gezeichneten Mantel gedreht. Vor Beginn des eigentlichen Versuches diente die Spule dazu, die gewünschte Siedetemperatur des Wassers herzustellen, das, auf  $100^\circ$  vorgewärmt, in den Apparat eingefüllt wird.

Der durch die elektrische Heizung erzeugte Wasserdampf tritt durch das in der Achse des Gefäßes *A* angebrachte Rohr *R*,

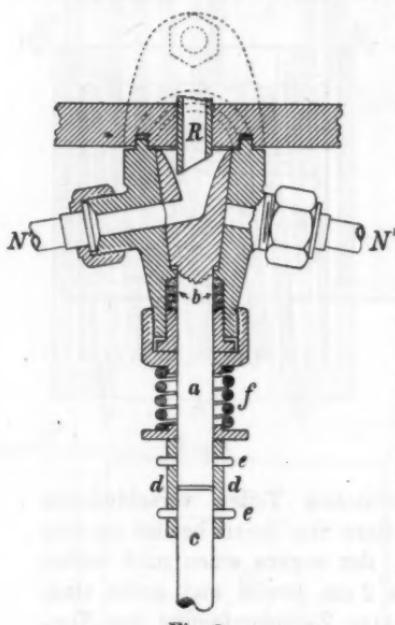


Fig. 3.

das an seinem oberen Ende einen etwas nach unten geneigten dachförmigen Ansatz trägt. Dieser Ansatz dient dazu, ein direktes Hineinspritzen des siedenden Wassers in das Rohr *R* zu verhindern. Dann passiert der Dampf den Hahn *H*, der durch einen Hebel so gestellt werden kann, daß der Dampf entweder den Weg *N* oder *N'* einschlägt, um sich in einem der beiden durch Wasser gekühlten Gefäße *K* oder *K'* zu kondensieren. Die Rohre *N* und *N'* sind durch

Überfallmuttern unterbrochen. Diese dienen dazu, die Kondensgefäß *K* mit dem Verdampfungsgefäß, das von oben in den Mantel *M*

gesetzt wird, zu verbinden. Der Körper und das Küken des Hahnes *H* sind aus Rotguß gefertigt. Beide Teile sind sorgfältig ineinander geschliffen. Die Konstruktion des Hahnes ist aus Fig. 3 ersichtlich. Mit dem Verdampfungsgefäß *A* ist der Hahn, der einen elliptischen Flansch besitzt, durch zwei Schrauben fest verbunden. In Fig. 3 ist der senkrecht zur Ebene der Zeichnung verlaufende Flansch durch gestrichelte Linien angedeutet. Das Küken des Hahnes setzt sich nach unten in das zylindrische Metallstück *a* fort, an dessen oberem

Teil sich die Dichtung *b* befindet, die durch eine Überfallmutter zusammengepreßt werden kann. Das Stück *a* ist mit dem Stiel *c* des Hahnes durch die Hülse *d* verbunden. Die einzelnen Teile werden durch Stifte *e* zusammengehalten. Die Feder *f* zieht das Küken nach unten und preßt es gegen den Körper des Hahnes. Als Schmiermittel wurde ein Gemisch von Talg und Graphit angewendet, das sich gut bewährte.

Die Kondensgefäße *K* stehen unter gleichem Druck. Zu diesem Zweck sind sie miteinander durch das Rohr *C* verbunden, von dem aus ein Stahlrohr zu der künstlichen Atmosphäre führt. Die Kondensgefäße bestehen aus Rotguß, jedes von ihnen faßt etwa 800 ccm und besitzt eine Höhe von 20 cm, einen äußeren Durchmesser von 10 cm. Sie sind gemeinsam von einem eisernen Bottich *G* umgeben, durch den dauernd Wasser zirkulieren kann. Durch die Hähne *I'* und *I''*, die sich unterhalb des Bottichs befinden, kann das in den Gefäßen *K* kondensierte Wasser abgelassen werden.

Um das Verdampfungsgefäß *A* nach Möglichkeit vor äußeren Wärmeverlusten zu schützen, wurde es rings von einem Mantel *M* umgeben, der mit Heißdampf-Zylinderöl gefüllt ist und elektrisch auf konstanter Temperatur gehalten werden kann. Der 63 cm hohe Mantel bildet einen Ring, dessen Querschnitt nach außen von einer Ellipse mit den Achsen 52 und 35 cm und nach innen von einem Kreise von 21 cm Radius begrenzt wird. In dem zylindrischen Hohlraum, der sich nach unten, wie die Figur zeigt, etwas verjüngt, befindet sich das Verdampfungsgefäß *A*. Es stand ursprünglich auf einem innerhalb des Hohlraumes vorspringenden Rand mit einer ringförmigen Fläche auf, die aber durch Ausfeilen auf drei kleine Flächenstücke von je etwa  $0,5 \text{ cm}^2$  verkleinert wurde. Ein Stellstift, der sich an einer dieser Flächen befindet, greift in eine Bohrung im vorspringenden Rand des Hohlzylinders ein, um die Stellung des Verdampfungsgefäßes innerhalb des Mantels zu fixieren. Im übrigen ist das Gefäß gegen den Mantel durch Luftzwischenräume isoliert. Am Flansch, wo sich der Deckel *D* aufsetzt, und der Zwischenraum sehr eng ist, wird die metallische Berührung durch einige Stücke Asbestpappe verhindert. Der Hohlraum des Mantels wird oben durch einen eisernen Deckel abgeschlossen,

der an drei Stellen durchbohrt ist, um die Drähte, die zu den Thermometern und der Spule führen, hindurchtreten zu lassen. Ferner besitzt er noch eine, durch einen kleinen Deckel wieder verschließbare Öffnung (in der Zeichnung nicht dargestellt) von etwa 6 cm Durchmesser, durch die man zur Schraube *S* gelangen kann. Der Raum zwischen dem Verdampfungsgefäß und dem eisernen Deckel wurde mit Watte ausgefüllt.

Wie die Zeichnung andeutet, umschließt der Mantel auch noch den Hahn *H* und einen Teil der Nickelrohre *N*, um zu verhindern, daß sich in der Nähe des Verdampfungsgefäßes ein Teil des Dampfes bereits kondensiert, wodurch störende Wärmeschwankungen hätten auftreten müssen. An der Austrittsstelle der Rohre *N* ist der Mantel am meisten verengt. Er wurde hier fest durch einen Asbestdeckel und Watte verschlossen, um Luftströmungen durch den Hohlraum des Mantels zu verhüten. In seiner äußeren Begrenzung erhielt der Querschnitt des Mantels eine elliptische Gestalt, um ohne zu starke Vergrößerung seines Volumens symmetrisch zu dem Hohlraum zwei Heizspulen und zwei Rührer anordnen zu können, die bei den großen Dimensionen notwendig erschienen, wenn man eine gleichförmige Temperaturverteilung erreichen wollte. In der Zeichnung ist nur ein Rührer *U* und eine Heizspule *Q* wiedergegeben. Die Spulen bestehen aus je zwei Windungen eines 2 cm breiten, gewellten Konstantanbandes, deren Zuleitungen, mit Schiefer isoliert, an dem 12 mm starken Messingdeckel *P* des Mantels befestigt sind. Der Messingdeckel ist in zwei Teile zerlegbar, die miteinander verschraubt werden können. Jeder dieser Teile trägt an zwei Messingsäulen eine Vorrichtung zur Aufnahme der Konstantanbänder. Diese Vorrichtung besteht im wesentlichen aus zwei horizontal verlaufenden Messingdrähten, die einen vertikalen Abstand von etwa 50 cm haben. Auf die Messingdrähte sind mehrere Porzellanröhren von wechselndem äußeren Durchmesser gesteckt. Das Konstantanband, das immer über die Rohrstücke engen Durchmessers geführt ist, kann auf diese Weise auf den Messingdrähten gut isoliert und unverschiebbar festgelegt werden. — Die elektrische Heizung des Mantels diente nur dazu, seine Temperatur konstant zu halten, auf die er zuvor

durch Gasfeuerung gebracht wurde. Für die elektrische Heizung wurden bei  $100^\circ$  etwa 60 Amp., bei  $180^\circ$  etwa 95 Amp. erfordert. Der Widerstand der parallel geschalteten Konstantanbänder betrug etwa  $\frac{1}{4}$  Ohm.

An jedem der beiden Teile des Messingdeckels ist außer dem Konstantanband noch der Rührer  $U$  angeordnet, der auf seiner 50 cm langen Achse ein dreifaches System von je vier Flügeln trägt. Der Antrieb beider Rührer geschieht durch denselben Elektromotor.

Die Temperatur des Mantels ist mit einem Platinwiderstandsthermometer gemessen. Zur Orientierung diente ein in  $\frac{1}{10}$  Grade geteiltes Quecksilberthermometer.

#### Die Messungen.

Das Schaltungsschema zur Messung der elektrischen Energie, die zur Verdampfung aufgewendet wurde, ist dasselbe wie bei der früheren Arbeit (vgl. I. c. 21. p. 859). Der Widerstand der Konstantanspule betrug 3,8 Ohm. Die Stromstärke wurde zwischen 5 und 10 Amp. variiert. Sie blieb während des Versuches derart konstant, daß die Trägheit, mit der die Spule die Energie an das Wasser abgab, nicht in Rechnung gesetzt zu werden brauchte. Die in den Zuleitungsdrähten zur Spule entwickelte Wärme ist gegen die übrige Energie verschwindend klein und ist deshalb vernachlässigt worden. Pro Minute sind 3—12 g Dampf erzeugt, wozu 1500—6000 Kalorien erforderlich sind.

Sollte die ganze dem Wasser zugeführte elektrische Energie  $E$  und auch nur diese zur Bildung von Dampf verwendet werden, so mußte, wenn man von der äußeren Wärmezufuhr durch Leitung oder Strahlung absieht, das Wasser und das Verdampfungsgefäß, die zusammen eine gewisse Wärmekapazität  $C$  besitzen, zum Schluß des Versuches dieselbe Temperatur haben wie zu Anfang. In aller Strenge konnte dies nicht erreicht werden. Die Temperaturen zu Anfang und zum Schluß des Versuches, wie sie mit dem in das Wasser ragenden Platinthermometer gemessen wurden, unterschieden sich im allgemeinen, doch betrugen die Differenzen selten über  $0,1^\circ$ . Macht man die Annahme, daß die Temperatur des Verdampfungsgefäßes identisch ist mit der Temperatur des Wassers und wächst letztere um  $\Delta t$  während des Versuches, so muß

der Betrag  $\Delta t \cdot C$  von der elektrischen Energie  $E$  abgezogen werden, um die dem Wasser innerhalb des Verdampfungsgefäßes zugeführte Wärme zu erhalten. Gleichung (1) lautet vollständiger:

$$(2) \quad E - \Delta t \cdot C + k = g \cdot L.$$

Die Kapazität des leeren Verdampfungsgefäßes betrug 3200 Grammkalorien. Sein Gewicht, einschließlich der Spule und des Hahnstückes bis zu den Überfallmuttern, belief sich auf 35 kg. Zu Beginn einer Versuchsreihe befanden sich in ihm 3500 g destillierten Wassers, von dem bis zu 1500 g verdampft wurden. Bei einem Wasserinhalt von 1700 g war die Spule noch gerade mit Wasser bedeckt. Die Wärmekapazität des mit Wasser gefüllten Gefäßes nahm also Werte an zwischen 6700 und 5200 Grammkalorien und die Korrektion  $\Delta t \cdot C$  im allgemeinen Beträge von einigen hundert Kalorien. Da die Temperatur des siedenden Wassers dauernd schwankte, so konnte  $\Delta t$  nur auf 0,01—0,02° gemessen werden. Ein Betrag von etwa 100 Kalorien mußte also klein sein gegen die aufgewendete elektrische Energie. Um dies zu erreichen, wurde die Dauer der Versuche auf 20—50 Minuten bemessen.  $E$  nahm dann Werte an von 30000—200000 Kalorien.

Während eines Versuches stieg die Temperatur des Wassers von selbst etwas an. Der Grund hierfür liegt in einem allmählichen Anwachsen des Druckes. Durch das kondensierte Wasser wird nämlich Luft aus den Kondensgefäßen verdrängt und dadurch das ihr zur Verfügung stehende Volumen verringert, denn der Raum des Verdampfungsgefäßes ist stets ganz mit Dampf gefüllt, der infolge seiner dauernden Strömung der Luft keinen Zutritt gestattet. Die Änderung der Siedetemperatur wurde dadurch in engen Grenzen gehalten, daß man durch Öffnen eines Hahnes aus der künstlichen Atmosphäre von Zeit zu Zeit etwas Luft ausströmen ließ. Die größten Unterschiede in der Siedetemperatur, die während eines Versuches aufraten, beliefen sich auf 0,1—0,2°. Es wurde angenommen, daß durch diese Schwankungen die Gleichmäßigkeit, mit der die Spule die Wärme an das Wasser abgab, nicht unterbrochen wurde. Der Schluß eines Versuches wurde vielfach durch den Zeitpunkt bestimmt, an dem infolge

des Ansteigens der Temperatur eine möglichst kleine Temperaturdifferenz gegen den Anfang vorhanden war.

Die Größe  $k$ , welche die dem Wasser von außen zugeführte Wärmemenge bedeutet, ist proportional mit der Dauer des Versuches, die in Minuten gerechnet, mit  $\vartheta$  bezeichnet wurde. Ferner hängt  $k$  wesentlich ab von der Temperaturdifferenz  $\tau$  zwischen Mantel und Verdampfungsgefäß. Innerhalb enger Grenzen darf man annehmen, daß eine lineare Beziehung zwischen  $k$  und der Temperaturdifferenz  $\tau$  besteht, so daß man setzen kann

$$(3) \quad k = \vartheta [\alpha \tau + k_0].$$

Diese Beziehung schließt die Möglichkeit ein, daß auch für die Temperaturdifferenz  $\tau = 0$  die Größe  $k$  nicht verschwindet. In der Tat wird dies im allgemeinen nicht der Fall sein, da die Zuleitungen zu der Spule, sowie die Thermometer und Dampfrohre direkt Wärme von dem Verdampfungsgefäß an die umgebende Zimmerluft führen. Die Versuche haben sich gut unter Anwendung der Beziehung (3) darstellen lassen. Immerhin können Bedenken entstehen, ob die Größe  $k_0$  stets mit genügender Genauigkeit als konstant angesehen werden darf. Es besteht die Möglichkeit, daß die gut durch Glas und Porzellan isolierten Stromdrähte, die zur Heizspule führen, bei verschiedenen Stromstärken auch verschiedene Wärmequanten nach außen leiten, da die Temperatur der Spule von der Strombelastung abhängt. Durch sehr dünne Thermolemente, die an die kupfernen Stromdrähte angelötet wurden, konnte aber festgestellt werden, daß das Temperaturgefälle längs des Drahtes von der Stromstärke nicht abhing und daß also auch die hindurcgehenden Wärmequanten stets dieselben blieben. Die Wassermenge, die sich während des Versuches in dem Kondensgefäß ansammelte, ließ man durch den Hahn I in eine Glasflasche fließen, in der sie zur Wägung gelangte. Der Hahn wurde stets 10 Minuten nach Beendigung des Versuches geöffnet und nachdem das unter Druck stehende Wasser ausgeflossen war, sofort wieder geschlossen. Nach einer weiteren Minute wurde er nochmals kurze Zeit geöffnet, um auch das in der Zwischenzeit noch angesammelte Wasser zu gewinnen. Es wurde dafür gesorgt, daß vor Beginn des Versuches die

innere Fläche des Kondensgefäßes möglichst ebenso benetzt war wie zum Schluß, nachdem Wasser herausgelassen war. Da das Wasser mit einem gewissen Überdruck aus dem Kondensgefäß herausgetrieben werden mußte, so konnten keine Versuche bei Atmosphärendruck angestellt werden. Die tiefste Temperatur, bei der noch Messungen ausgeführt wurden, betrug 102°.

Die Wägung wurde auf das Vakuum reduziert. Die so gefundene Zahl bedarf aber noch einer Korrektion, um die Masse  $g$  des verdampften Wassers zu erhalten, da ein Bruchteil des entwickelten Dampfes in dem Verdampfungsgefäß zurückbleibt. Dieser Bruchteil ist gegeben durch das Verhältnis  $v_1/v$  der spezifischen Volumina von Wasser und gesättigtem Dampf bei der Siedetemperatur  $t$ . Ergibt die Wägung die Wassermasse  $g'$ , so ist mit ausreichender Genauigkeit  $g = g'[1 + 1/v]$ . Die auf diese Weise notwendige Korrektion des Wassergewichtes wächst stark mit der Temperatur. Sie beträgt bei 180° 0,52 Proz. Da diese Zahl aber noch mit vollkommener Sicherheit zu ermitteln ist (vgl. unten Tab. 8), so kann diese Korrektion in keiner Weise Bedenken erregen. Aus Gleichung (2) und (3) folgt die Beziehung

$$(4). \quad E - \Delta t \cdot C + \vartheta [a \tau + k_0] = g L.$$

Die Größe  $\tau$  wurde bei jedem Versuch aus mehreren Messungen der Siedetemperatur des Wassers und der Temperatur des Mantels abgeleitet. Das Mittel  $t$  aus den Siedetemperaturen des Wassers wurde der zu demselben Versuch gehörigen Verdampfungswärme  $L_t$  zugeordnet. Hierbei muß bemerkt werden, daß im Dampf stets eine tieferen Temperatur beobachtet wurde als im siedenden Wasser. Diese Unterschiede betragen einige Zehntel Grade und schienen unabhängig von der Siedetemperatur selbst.

Die Verdampfungswärme ändert sich nur um etwa 0,1 Proz. pro Grad. Daher ist es von geringer Bedeutung, ob sie auf die im Dampf oder im Wasser beobachtete Temperatur bezogen wird. Es wurde, ebenso wie bei den früheren Versuchen unter 100°, die im Wasser gemessene Temperatur  $t$  für die Verdampfungswärme angenommen. Gewisse Gründe sprechen für die Entscheidung nach dieser Richtung:

Wenn der Dampf bei der in ihm beobachteten Temperatur  $t'$  gesättigt ist, und er das Verdampfungsgefäß mit dieser Temperatur verlassen würde, so wäre die gemessene Energie gleichwertig mit  $L_{t'} - (t - t')$ . Die spezifische Wärme des Wassers ist hierbei gleich 1 gesetzt. Da der Dampf aber im Rohr  $R$  noch einmal in Wärmeaustausch mit dem Wasser tritt, so kann man annehmen, daß er beim Verlassen des Siedegefäßes die Temperatur  $t$  besitzt und also um  $t - t'$  Grad überhitzt ist. In diesem Falle ist, wenn man  $c_p$  die spezifische Wärme des Dampfes nennt, die Energie gleichwertig mit

$$L_{t'} - (t - t')(1 - c_p) = L_t - (t - t') \left[ 1 - c_p + \frac{dL}{dt} \right].$$

Dieser Ausdruck weicht nur um Beträge der Größenordnung 0,01 Proz. von  $L_t$  ab, da  $c_p$  sowohl wie  $(dL/dt)$  nahe den Wert 0,5 besitzen und  $t - t'$  einige Zehntel Grad nicht überschreitet.

Im allgemeinen wird für jeden Versuch ein etwas anderer Wert der im Wasser beobachteten Temperatur  $t$  gelten. Nennt man  $t_m$  das Mittel der nahe beieinander liegenden Siedetemperaturen  $t$  eines ganzen Beobachtungssatzes und  $L_m$  die zu  $t_m$  gehörige Verdampfungswärme, so besteht die Beziehung

$$(5) \quad L_t = L_m + \frac{dL}{dt} [t - t_m].$$

Der Temperaturkoeffizient  $dL/dt$  der Verdampfungswärme bei der Temperatur  $t_m$  kann, da es sich hier um eine sehr kleine Korrektion handelt, genügend genau aus meiner vorläufigen Zusammenstellung<sup>1)</sup> der Konstanten für Wasserdampf entnommen werden.

Aus Gleichung (4) und (5) folgt

$$(6) \quad E - \Delta t \cdot C + \vartheta [a\tau + k_0] = g \left[ L_m + \frac{dL}{dt} (t - t_m) \right],$$

oder, wenn man zur Abkürzung setzt

$$(7) \quad K' = E - \Delta t \cdot C - g \frac{dL}{dt} [t - t_m],$$

so ist

$$(8) \quad K' = L_m g - \vartheta [a\tau + k_0].$$

1) F. Henning, Ann. d. Phys. 22. p. 626. 1907.

In Gleichung (8) sind bekannt oder werden durch direkte Beobachtung gewonnen alle Größen bis auf  $L_m$ ,  $k_0$  und  $a$ , die beiden letzteren treten nur in Korrektionsgliedern auf.

Die Beobachtungen liefern eine Anzahl von Gleichungen der Form (8), aus denen nach der Methode der kleinsten Quadrate  $L_m$ ,  $k_0$  und  $a$  ermittelt worden sind.

Bezeichnet man bei den Platinthermometern mit  $w$  den Widerstand, dessen Einheit durch eine stets zur Vergleichung herangezogene 5 Ohm-Büchse dargestellt wird, ferner mit  $t_p$  die Platintemperatur und mit  $t$  die CelsiusTemperatur, so gilt für

$$T_1 \text{ Nr. 10 [Wasser]} \quad t_p = 112,77_w - 257,07,$$

$$T_2 \text{ Nr. 11 [Dampf]} \quad t_p = 111,98_w - 257,10,$$

$$T_3 \text{ Nr. 500 [Mantel]} \quad t_p = 207,92_w - 257,14.$$

Die Größen  $t$  und  $t_p$  stehen miteinander in der Beziehung

$$t = t_p + 1,5 \left[ \left( \frac{t}{100} \right)^2 - \frac{t}{100} \right].$$

Die Beobachtungen sind in den Tabb. 1—5 enthalten. Die Bedeutung der einzelnen Kolumnen ist aus den Überschriften ersichtlich, die bereits gelegentlich der Formeln (1) bis (8) näher definiert worden sind. Über jeder Tabelle steht die Mitteltemperatur  $t_m$  sowie der Ausdruck  $K' = L_m g - \vartheta(a\tau + k_0)$ , in den die wahrscheinlichsten Werte von  $L_m$ ,  $k_0$  und  $a$  eingesetzt sind. Die letzte Spalte der Tabellen gibt den Unterschied der beobachteten Werte von  $K'$  (vgl. die 7. Spalte der Tabellen) gegen die aus der Formel berechneten Werte. Bei den ersten Beobachtungen gelang es nur, täglich drei Versuche anzustellen. Später wurde es durch größere Übung ermöglicht, vier Versuche zu erledigen. Die Grenze war dadurch gegeben, daß das Wasserquantum im Verdampfungsgefäß höchstens bis zum oberen Rand der Spule sinken durfte. Die Versuche sind in der Reihenfolge, in der sie angestellt wurden, in die Tabellen aufgenommen. Im allgemeinen wurde an den verschiedenen Tagen abwechselnd mit der größten und der kleinsten Verdampfung begonnen. Bei der höchsten Temperatur von  $180^\circ$  konnten nur an zwei Tagen Versuche angestellt werden. Zu Beginn des dritten Tages versagte der Apparat seinen Dienst und es war infolge der durch die starke Hitze eintretenden allmählichen Veränderungen des

Tabelle 1.

 $t_m = 102,34^\circ\text{C.}$   $K' = 536,93 \text{ g} - \vartheta (48,22 r - 14,23)$ 

Datum	$\vartheta$ Min.	$t$ $^\circ\text{C.}$	$t$ $^\circ\text{C.}$	$g$	$\Delta t. C$ Kal.	$g \frac{dL}{dt} (t - t_m)$ Kal.	$K'$ beob. Kal.	$r$ $^\circ\text{C.}$	$\vartheta (\alpha r + k_0)$ Kal.	$K'$ beob-ber. $^\circ/\text{os}$
28/11. 08	26	102,27	274,00	-875	+12	145161	2,23	2135	+1,2	
	25	24	196,05	+73	+13	108051	2,30	2128	-0,8	
	30	31	159,76	-121	+3	79762	2,18	2399	+1,7	
	31	08	82,30	-44	+14	41856	2,41	2788	-1,1	
1./12. 08	40	102,37	100,89	-78	-2	53032	1,04	1229	+1,7	
	30	42	146,36	+300	-8	77602	1,01	883	-1,3	
	24	37	189,76	+392	-4	98407	1,09	789	+5,4	
	28	46	238,94	0	-19	128043	0,92	587	+2,6	
4./12. 08	24	102,42	246,68	+13	-13	131047	1,22	925	-3,6	
	26	46	200,56	-241	-16	106822	1,20	979	+1,1	
	28	43	145,43	+290	-8	76602	1,31	1187	-3,9	
	32	44	89,76	-325	-6	46721	1,22	1282	-5,2	
7./12. 08	29	102,51	72,12	+162	-8	38205	0,97	803	+9,1	
	30	48	156,53	-286	-14	83039	0,98	843	-2,0	
	25	48	185,61	+136	-17	98778	1,03	756	-1,3	
	28	51	289,08	-83	-32	154303	0,98	787	-0,8	

Tabelle 2.  
 $t_m = 120,78^\circ \text{C.}$     $K' = 625,32 \text{ g} - \vartheta (51,64 \tau - 20,50).$

Datum	$\vartheta$ Min.	$t$ $^\circ \text{C.}$	$g$	$\Delta t. C$ Kal.	$g \frac{dL}{dt} (t-t_m)$ Kal.	$K'$ beob. Kal.	$\tau$ $^\circ \text{C.}$	$\vartheta (\alpha \tau + k_0)$ Kal.	$K$ beob.-ber. %/oo
8./11. 08	50	120,79	317,73	+ 444	- 4	158060	3,66	+ 8425	- 2,7
	45	86	458,62	+ 136	- 29	245722	3,57	7373	+ 0,2
	36	89	103,29	- 80	- 8	486828	3,55	5862	+ 8,9
6./11. 08	28	120,67	300,15	+ 170	+ 20	155956	1,50	1595	- 0,8
	45	74	248,43	+ 17	+ 5	128125	1,50	2564	+ 1,4
	50	75	142,14	- 56	+ 2	71552	1,59	3080	- 0,5
9./11. 08	26	120,51	271,40	- 31	+ 47	141366	1,87	1806	+ 0,7
	41	45	113,91	- 184	+ 24	57997	1,36	2039	+ 3,4
	31	48	166,69	+ 29	+ 32	86196	1,24	+ 1250	- 1,3
8./12. 08	23	121,06	255,05	+ 301	- 49	134495	0,24	- 186	+ 2,4
	22	05	168,33	+ 30	- 31	88436	0,27	- 144	- 1,5
	25	03	126,73	+ 98	- 22	66587	0,28	- 151	- 2,1
42			107,91	- 87	- 17	56626	0,80	- 211	- 4,8

Tabelle 3.

Verdampfungswärme des Wassers.

$$t_m = 140,97^\circ \text{ C.} \quad K' = 609,80 - \vartheta (52,73 r - 2^{\circ},80).$$

Datum	$\vartheta$	Min.	$t$	${}^\circ \text{C.}$	$g$	$d t, C$	Kal.	$g \frac{dL}{dt} (t-t_m)$	K' beob. Kal.	$r$	$\vartheta (r+k_0)$ Kal.	$K'$ beob.-ber. ${}^\circ \text{C.}$
12/11. 08	27	140,70	305,01	- 66	+ 58	149221	4,75	6026	- 1,2			
	36	68	203,19	+ 445	+ 41	95425	4,83	8186	+ 0,7			
	48	74	152,58	+ 181	+ 24	66901	4,83	10916	+ 0,9			
17/11. 08	26	140,97	297,32	- 165	0	150044	1,71	1635	+ 1,1			
	50	99	148,06	- 277	- 2	72177	1,78	8197	- 1,1			
	37	14,15	199,61	+ 172	- 25	99691	1,53	1975	- 0,5			
32	09	248,63	+ 355	- 21	- 21	125024	1,59	1809	+ 1,1			
	26	141,11	281,78	- 13	- 27	142064	1,77	1717	+ 1,3			
	30	24	234,09	+ 281	- 44	117726	1,58	1681	+ 1,0			
23	29	02	158,97	+ 322	- 6	79107	1,75	1885	- 0,2			
	23	07	67,68	- 286	- 5	32904	1,80	1556	- 0,9			
	26	141,18	292,88	+ 70	- 43	146160	2,58	2828	- 1,6			
26	26	14	217,84	+ 162	- 26	107839	2,80	3130	- 0,4			
	26	17	146,78	- 6	- 20	71496	2,67	2951	- 5,0			
	28	05	85,22	+ 250	- 5	40306	2,69	3207	+ 2,1			

Tabelle 4.  
 $t_m = 160,56^\circ\text{C}$ .  
 $K' = 495,95\text{ g} - \vartheta(70,63\tau - 44,30)$ .

Datum	$\vartheta$ Min.	$t$ $^\circ\text{C}$ .	$g$	$\Delta t, C$ Kal.	$g \frac{dL}{dt} (t-t_m)$ Kal.	$K'$ beob. Kal.	$\tau$ $^\circ\text{C}$ .	$\vartheta(a\tau + k_0)$ Kal.	$K'$ theor.-ber. %/oo
17/12. 08	21	160,54	257,13	-350	+ 4	127054	0,80	256	-1,7
	24	56	194,89	+250	0	98413	0,78	259	+0,2
	26	65	147,03	-101	-10	72549	0,70	134	-3,2
	32	46	90,53	-246	+ 7	44179	0,94	706	-0,3
19/12. 08	31	160,47	89,86	+169	+ 6	42215	1,52	1999	-5,9
	21,008	54	114,19	-368	+ 2	56638	1,45	1221	+4,1
	19	65	154,24	+311	-11	76001	1,37	997	+6,7
	22	44	275,26	-271	+25	134908	1,56	1450	-1,2
22/12. 08	28	160,77	326,80	+460	-52	162008	0,76	262	+1,2
	20	64	161,18	+331	-10	79491	0,91	400	-1,3
	21	64	118,10	+385	- 7	58022	0,90	404	-2,5
	30	52	85,03	- 50	+ 3	41682	1,02	832	+8,3

Tabelle 5.  
 $t_m = 180,72$ .  
 $K' = 481,99\text{ g} - \vartheta(65,47\tau - 36,16)$ .

2/1. 09	34	180,64	96,02	+ 642	+ 6	44568	1,81	1686	-0,6
	32	76	129,27	+ 6	- 4	61472	1,16	876	+0,7
	17	76	145,80	- 11	- 5	63688	1,11	621	+0,5
	20	77	273,71	+ 366	-11	131148	1,15	782	0,0
5/1. 09	28	180,78	271,00	+ 32	-12	126837	2,16	2421	+1,1
	28	79	182,21	+ 225	-11	90085	2,10	2830	-2,5
	22	71	128,11	+ 426	+ 1	59251	2,19	2358	-2,3
	31	67	97,03	+ 80	+ 12	48312	2,32	8688	+8,9

Materials und insbesondere infolge der Abnutzung des Hahnes  $H$  nicht wieder der erforderliche Grad der Dichtheit zu erreichen. Nach den Erfahrungen, die früher bei den Messungen des Sättigungsdruckes an diesem Apparat gesammelt waren, stand bereits zu erwarten, daß mit ihm die Verdampfungswärme nur im günstigsten Falle bis  $190^{\circ}$  würde durchgeführt werden können.

#### Resultate.

Tab. 6 enthält in Spalte 1 und 2 die Resultate der Versuche und zwar sowohl der in dieser Arbeit näher beschriebenen Beobachtungen oberhalb  $t = 100^{\circ}$  als auch meine älteren Messungen, die sich auf Temperaturen zwischen 30 und  $100^{\circ}$  beziehen. Spalte 3 gibt die nach einem graphischen Ausgleichsverfahren ermittelten Werte von  $L$  wieder, die, wie Spalte 4 zeigt, im ungünstigsten Falle nur wenig über 1 Pro mille von den Beobachtungen abweichen. Es gelang nicht,

Tabelle 6.

1	2	3	4
$t$	$L$ beob.	$L$ ber.	$L$ beob.-ber.
30,12	579,0	579,22	-0,22
49,14	569,55	568,99	+0,56
64,85	559,47	560,07	-0,60
77,34	552,47	552,71	-0,34
89,29	545,76	545,42	+0,34
100,59	538,25	538,28	-0,03
102,34	536,93	537,15	-0,22
120,78	525,32	524,80	+0,52
140,97	508,60	510,24	-0,64
160,56	495,95	496,17	-0,22
180,72	481,99	481,69	+0,30

eine einfache Formel zu finden, durch die sich die Messungen ebensogut hätten darstellen lassen. Unter  $100^{\circ}$  war früher eine befriedigende Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung erzielt, wenn man nach dem Vorschlage von Hrn. Thiesen eine Exponentialgleichung aufstellte von der

Form  $L = A[365 - t]^B$ . Diese Gleichung ist so beschaffen, daß sie für die kritische Temperatur  $t = t_k = 365^\circ$  die Verdampfungswärme  $L = 0$  liefert, wie es die Theorie verlangt. Aber selbst, wenn man auch  $t_k$  als unbekannte Konstante der Gleichung ansieht, was bis zu einer gewissen Grenze zulässig ist, da die kritische Temperatur noch um einige Grade unsicher ist, so weicht im günstigsten Falle die Formel von den Beobachtungen bei  $140^\circ$  um etwa 3 Promille, bei  $180^\circ$  um über 2 Promille ab. Die Werte der Konstanten sind in diesem Falle

$$t_k = 366,25; \quad A = 93,706; \quad B = 0,31312.$$

Etwas bessere Ergebnisse lassen sich erzielen, wenn man statt der Exponentialkurve eine Parabel von der Form

$$L = a + b[t - 100] + c[t - 100]^2$$

zur Vergleichung heranzieht. Für die günstigsten Werte der Koeffizienten  $a = 538,46$ ;  $b = -0,6422$ ;  $c = -0,000833$  beträgt die Abweichung der so berechneten  $L$  von den Beobachtungen bei  $140^\circ$  noch 2 Promille, bei  $180^\circ$  reichlich 1,5 Promille. Gegenüber der Exponentialgleichung hat die Parabel aber den Nachteil, daß sie völlig ungeeignet ist, durch Extrapolation auch nur angenäherte Werte der Verdampfungswärme zu liefern, denn aus ihr folgt, daß  $L$  erst für  $t = 606^\circ\text{C}$ . verschwindet. Da kein Grund vorhanden ist, den Beobachtungen bei  $140^\circ$ , die von beiden Formeln besonders stark abweichen, eine geringere Genauigkeit beizumessen als den übrigen Zahlen, so wurde eine Ausgleichung der Versuche auf graphischem Wege vorgenommen, wobei sich herausstellte, daß zwischen  $120$  und  $180^\circ$  die Verdampfungswärme als eine lineare Funktion der Temperatur angesehen werden kann.

Um für jede Temperatur  $t$  die Werte der Verdampfungswärme, die der graphischen Ausgleichung zugehören, ermitteln zu können, dient Tab. 7, die in den Spalten Gr - I und Gr - II angibt, um wieviel bei der Temperatur  $t$  die Werte von  $L$  zu erhöhen sind, die sich aus folgenden Formeln ergeben:

$$(I) \quad L = 538,46 - 0,6422[t - 100] - 0,000833[t - 100]^2,$$

$$(II) \quad L = 539,66 - 0,718[t - 100].$$

Tabelle 7.

<i>t</i>	Gr - I	<i>t</i>	Gr - I	Gr - II
30	-0,05	110	+0,17	-
40	-0,01	120	+0,06	-0,35
50	+0,02	130	-0,20	-0,04
60	+0,06	140	-0,50	0,00
70	+0,10	150	-0,51	0,00
80	+0,13	160	-0,85	0,00
90	+0,18	170	-0,03	0,00
100	+0,20	180	+0,47	0,00

In Tab. 8, Spalte 2 und 3 sind die auf diese Weise für Temperaturen von 10 zu 10° berechneten Verdampfungswärmern *L* nebst den zugehörigen Temperaturkoeffizienten  $dL/dt$  aufgenommen. Für Zwischentemperaturen kann man mit genügender Genauigkeit die Werte von *L* durch Interpolation ableiten. Spalte 4 und 5 enthält die nach Beobachtungen von Holborn und Henning ermittelten Werte des Sättigungsdruckes *p* und dessen Temperaturkoeffizienten  $dp/dt$ .<sup>1)</sup>

Mit Hilfe der Clapeyronschen Gleichung

$$v - v_1 = \frac{A L}{t + 273} \frac{1}{dp} dt$$

Kann man aus *L* und  $dp/dt$  die Differenz  $v - v_1$  der spezifischen Volumina von gesättigtem Dampf und Wasser berechnen. *A* bedeutet das Wärmeäquivalent. Ist  $v - v_1$  in Kubikzentimeter, *p* in Millimeter Quecksilber gemessen, so ist *A* = 31406. Dem entspricht, daß eine Grammkalorien gleichwertig ist mit einer Hubarbeit von 427 g-Gewicht-Meter. Addiert man zu  $v - v_1$  das spezifische Volum  $v_1$  des Wassers, das für 110° und darunter 1,0, für 120—180° 1,1 gesetzt ist, so erhält man das spezifische Volumen *v* des gesättigten Dampfes. Vgl. Spalte 6. Zum Vergleich sind in Spalte 7 und 8 die pro-

1) Bei meiner vorläufigen Berechnung von  $dp/dt$ , Ann. d. Phys. 22. p. 626. 1907, sind infolge eines Rechenfehlers die oberhalb 100° gegebenen Werte etwas zu groß. Der Fehler wächst mit der Temperatur, er beträgt bei 180° etwa 3 Promille. Um denselben Betrag sind die Werte von *v* dort zu klein.

Tabelle 8.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$t$ ° C.	$L$ Katalis.	$\frac{dL}{dt}$	$p$ mm Hg	$\frac{dp}{dt}$ mm Hg Grad	$v$ cm	$v_t - v$ Proc.	$v_K - v$ Proc.	$G$ Katalis.	$G_R - G$ Proc.	$h$ Katalis.	
30	579,3	31,71	1,819	33010	0,2			609,3	+1,1	—	
40	574,0	0,54	55,18	2,939	19600	0,3		613,9	+0,8	-1,37	
50	568,5	0,56	92,80	4,588	12050	0,6		618,4	+0,6	-1,32	
60	562,9	0,57	149,19	6,916	7677	0,7		622,8	+0,3	-1,26	
70	557,1	0,59	233,53	10,11	5046	0,8		627,0	+0,1	-1,21	
80	551,1	0,61	355,1	14,40	3406	1,1		631,0	-0,0	-1,16	
90	545,0	0,62	525,8	19,99	2360	1,3		634,9	-0,1	-1,12	
100	538,7	0,64	760,0	27,12	1673	1,6	+0,1	638,7	-0,3	-1,08	
110	532,1	0,67	1074,5	36,10	1210	2,0	0,1	642,2	-0,3	-1,05	
120	525,3	0,70	1488,9	47,16	891,2	2,5	0,1	645,5	-0,4	-1,02	
130	518,2	0,72	2025,6	60,60	667,5	3,1	0,2	648,6	-0,4	-0,98	
140	510,9	0,72	2709,5	76,67	507,8	3,5	0,3	651,5	-0,4	-0,93	
150	503,8	0,72	3568,7	95,66	392,1	4,5	0,3	654,7	-0,4	-0,88	
160	496,6	0,72	4633	117,7	307,1	5,1	+0,1	657,8	-0,4	-0,83	
170	489,4	0,72	5987	148,4	243,0	6,0	0,0	661,0	-0,4	-0,78	
180	482,2			7514	172,7	6,8	-0,3	664,2	-0,4		

zentischen Abweichungen des für den idealen Gaszustand berechneten spezifischen Volumens  $v_i$  und des von Knoblauch, Linde und Klebe<sup>1)</sup> direkt beobachteten spezifischen Volumen  $v_k$  von den Werten der Spalte 6 aufgenommen. Hierbei ist gesetzt

$$v_i = \frac{82,1}{18,016} \cdot \frac{760}{p} \cdot T.$$

Die Übereinstimmung zwischen den berechneten und direkt beobachteten Werten von  $v$  ist recht befriedigend in Anbetracht des Umstandes, daß jede der in die Berechnung eingehenden Größen  $A$ ,  $L$  und  $dp/dt$  nur auf etwa 1 Promille bekannt ist und daß bei den Beobachtungen von Knoblauch, Linde und Klebe die Unsicherheiten der Temperaturmessung schon bis 2 Promille Fehler verursachen können. Spalte 9 enthält die Gesamtwärme  $G$  des Wassers, wie sie nach dem Ausdruck  $G = L + t \cdot c_m$  ermittelt ist. Die mittlere spezifische Wärme  $c_m$  des Wassers zwischen 0 und  $t^o$  ist nach Dieterici<sup>2)</sup> angenommen. Die Spalte 10 gibt, in Prozenten ausgedrückt, die Differenz der Regnaultschen Gesamtwärme  $G_R = 606,5 + 0,305t$  gegen die in Spalte 9 berechneten Werte von  $G$ . Für die spezifische Wärme  $h$  des stets gesättigten Dampfes gilt nach Clausius die Beziehung

$$h = \frac{dL}{dt} - \frac{L}{t + 273} + c.$$

Nach dieser Formel ist  $h$  in Spalte 11 berechnet. Dabei ist die spezifische Wärme  $c$  des Wassers ebenfalls nach Dieterici angesetzt.

1) O. Knoblauch, R. Linde u. H. Klebe, Mitteilungen über Forschungsarbeiten. Ver. d. Ing. Heft 21. p. 38. 1905.

2) C. Dieterici, l. c.

(Eingegangen 31. März 1909.)

**3. Phänomenologisches  
über Dispersion und Zeeman-Effekt;  
von Franz Koláček.**

**Einleitung.**

Dieser Aufsatz beweckt eine der Erfahrung angepaßte mathematische Beschreibung der Dispersion und der Hauptzüge des Zeeman-Effektes auf Grundlage sehr allgemeiner hier passend spezialisierter Differentialgleichungen<sup>1)</sup>, bei deren Herleitung keinerlei Voraussetzungen über das physikalische Wesen des Lichtes gemacht wurden. Nur folgende rein phänomenologische Tatsachen wurden vorangestellt.

a) Der Lichtvektor, dessen Komponenten  $u v w$  der Transversalitätsbedingung

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

genügen sollen, ist periodischer Natur und pflanzt sich mit einer von der Lichtintensität unabhängigen Geschwindigkeit in ebenen Wellen fort. Hieraus folgt, daß  $u, v, w$  drei linearen partialen Differentialgleichungen mit konstanten realen Koeffizienten zu genügen haben, welche wegen (1) notwendigerweise die Form haben müssen:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{m=0} \alpha_m \frac{\partial^m u}{\partial t^m} = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \sum_{m=0} \alpha_m \frac{\partial^m v}{\partial t^m} = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \sum_{m=0} \alpha_m \frac{\partial^m w}{\partial t^m} = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}. \end{array} \right.$$

1) F. Koláček, „Theorie der Fortpflanzung des Lichtes in anisotropen Medien in induktiver Darstellung.“ Sitzungsber. d. Kgl. böhm. Ges. d. Wissensch., math.-naturw. Klasse p. 1—107. 1897.

Hierin bedeuten  $U, V, W$  lineare Aggregate von Derivationen der  $u, v, w$  nach  $x, y, z, t$  mit realen Koeffizienten; die  $\alpha_m$  sind gleichfalls Konstanten,  $m$  eine mit Null beginnende endliche ganze Zahl.

$\beta)$  Sollen sich in einer beliebigen Richtung nur zwei Wellen fortpflanzen können, so dürfen in  $UVW$  höchstens erste Derivationen nach  $x, y, z$  vorkommen. Die Zahl der Derivationen nach  $t$  ist vorläufig unbeschränkt, wird aber später als endlich angenommen werden. Ein Glied von  $U, V, W$  ist beispielsweise

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^r u}{\partial t^r}.$$

$\gamma)$  Die Existenz stehender Lichtschwingungen (Wiener) lehrt, daß es zweierlei Formen der Lichtenergie, daher auch zweierlei Lichtvektoren geben muß. Wir werden dem *Lichtvektor*  $uvw$  als *anderen* Lichtvektor  $\xi \eta \zeta$  den nach  $t$  derivierten Wirbelvektor von  $uvw$  mit den Komponenten

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \eta = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \zeta = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{array} \right.$$

zuordnen.

Eingeführt in (2) ergibt dies

$$(3a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^3 \xi}{\partial t^3} - \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \frac{\partial^m \xi}{\partial t^m} \\ = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right] \text{ usw.} \end{array} \right.$$

Eine Reduktion der in  $UVW$  vorkommenden Konstantenzahl wird möglich, wenn wir die Bedingung stellen, daß auch für  $\xi \eta \zeta$  Gleichungen vom Typus (2) bestehen sollen, in welchen (an Stelle von  $u, v, w$ ) nur die  $\xi \eta \zeta$ , ihre Derivationen nach  $t, x, y, z$  vorkommen, keineswegs aber die  $u, v, w$ , oder solche Derivationen derselben, die sich, wie beispielsweise

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

durch  $\xi, \eta, \zeta$  nicht ausdrücken ließen.

Durch diese Hypothese tritt eine Vereinfachung von  $U, V, W$  ein. Man findet als allgemeinsten Ausdruck dieser Größe:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} U = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[ \frac{\partial \Psi_n}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Theta_n}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Theta_n}{\partial w} \right) \right. \\ \quad \left. + s_3^{(n)} \cdot \eta - s_2^{(n)} \cdot \zeta + \varepsilon^{(n)} \cdot u + \sigma_3^{(n)} \cdot v - \sigma_2^{(n)} \cdot w \right], \\ V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[ \frac{\partial \Psi_n}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Theta_n}{\partial w} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Theta_n}{\partial u} \right) \right. \\ \quad \left. + s_1^{(n)} \cdot \zeta - s_3^{(n)} \cdot \xi + \varepsilon^{(n)} \cdot v + \sigma_1^{(n)} \cdot w - \sigma_3^{(n)} \cdot u \right], \\ W = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[ \frac{\partial \Psi_n}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Theta_n}{\partial u} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Theta_n}{\partial v} \right) \right. \\ \quad \left. + s_2^{(n)} \cdot \xi - s_1^{(n)} \cdot \eta + \varepsilon^{(n)} \cdot w + \sigma_2^{(n)} \cdot u - \sigma_1^{(n)} \cdot v \right], \end{array} \right.$$

wobei

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \Psi_n = b_{11}^{(n)} \xi^2 + b_{22}^{(n)} \eta^2 + \dots + 2 b_{23}^{(n)} \eta \zeta, \\ 2 \Theta_n = c_{11}^{(n)} u^2 + c_{22}^{(n)} v^2 + \dots + 2 c_{23}^{(n)} v w \end{array} \right.$$

homogene quadratische Formen von  $\xi, \eta, \zeta, u, v, w$  mit konstanten realen Koeffizienten vorstellen.<sup>1)</sup>

1) Zu demselben Ergebnis führt die Annahme, daß auch der Wirbelvektor von  $u, v, w$ , nämlich

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \text{ usw.},$$

den wir als zu  $uvw$  konjugiert bezeichnen können, Gleichungen vom Typus (2) zu genügen hat. Von der Richtigkeit der Gleichung (4) überzeugt man sich durch Einführung von (4) in (2).

Man findet nach Ausführung der Rechnung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{\partial \xi^m}{\partial t} = \frac{\partial V'}{\partial x} - \frac{\partial W'}{\partial y} \text{ usw.},$$

wobei

$$V' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Psi_n}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Theta_n}{\partial \zeta} + \frac{\Delta \partial \Theta_n}{\partial v} \right) \right. \\ \quad \left. - s_2^{(n)} \cdot \eta + \frac{\partial}{\partial t} \left( s_1^{(n)} \frac{\partial \eta}{\partial x} + s_3^{(n)} \frac{\partial \eta}{\partial y} + s_3^{(n)} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) + \sigma_3^{(n)} \xi - \sigma_1^{(n)} \zeta \right] \text{ usw.}$$

Die von  $u, v, w$  linear abhängige Größe  $\partial^2 \Theta_n / \partial u \partial t$  läßt sich wegen

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial}{\partial x} \left( - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

durch Differentialquotienten von  $\xi, \eta, \zeta$  ausdrücken.

Speziellere Formen von (9) finden sich schon in Voigts Kompendium vor.

Auch die Koeffizienten  $s_1^{(n)}, s_2^{(n)}, s_3^{(n)} \dots, \epsilon^{(n)}, \dots \sigma_1^{(n)}, \sigma_2^{(n)}, \sigma_3^{(n)}$  sollen real sein. An der Form der Gleichungen (4) ändert sich nichts, wenn wir die  $\xi, \eta, \zeta$  nicht durch die Gleichung (3), sondern durch

$$(3a) \quad \xi = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \eta = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

definieren, weil der Differentialgleichung (2) Werte der  $uvw$  genügen, die mit

$$e^{\nu t} = e^{\frac{2\pi}{\tau} t \cdot i}$$

proportional sind, und nur derartige Integrale von (2) benutzt werden, welche periodischen Wellen entsprechen. Es dürfen dann an Stelle von  $UVW$  andere Ausdrücke gesetzt werden, welche zu den nämlichen Endresultaten führen, beispielsweise

$$(6) \quad \begin{cases} U = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial w} \right) \\ \quad + s_3 \eta - s_2 \zeta + \epsilon u + \sigma_3 v - \sigma_2 w \text{ usw.}, \end{cases}$$

wobei

$$(7) \quad \begin{cases} 2\Psi = b_{11} \xi^2 + b_{22} \eta^2 + \dots 2b_{23} \eta \zeta, \\ 2\Theta = c_{11} u^2 + c_{22} v^2 + \dots 2c_{23} v w + \dots, \end{cases}$$

und worin die Koeffizienten  $b_{ij}, c_{ij}, s_i, \sigma_i, \epsilon$  jetzt ganze rationale Funktionen von  $\nu = 2\pi i/\tau$  mit realen Koeffizienten vorstellen.

Alle Koeffizienten werden also abhängig von der Farbe.

Wir wollen in (4), (6) die Größen  $\epsilon, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , welche natürlicher Aktivität bzw. Bewegung des Mediums entsprechen, unterdrücken.

Setzen wir noch

$$(8) \quad \frac{\nu^2 - \sum_{m=0} \alpha_m \nu^m}{\nu^2} = F(\nu),$$

so folgt nach Einführung der Werte  $UVW$  aus (6) in (2):

$$(9) \quad \begin{cases} F(\nu) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta \Theta_1 - \frac{\partial J}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} + s_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + s_2 \frac{\partial \xi}{\partial \eta} + s_3 \frac{\partial \xi}{\partial z}, \\ F(\nu) \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \Delta \Theta_2 - \frac{\partial J}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_3}{\partial x} + s_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} + s_2 \frac{\partial \eta}{\partial y} + s_3 \frac{\partial \eta}{\partial z}, \\ F(\nu) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \Delta \Theta_3 - \frac{\partial J}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + s_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + s_2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} + s_3 \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \end{cases}$$

wobei

$$\Theta_1 = \frac{\partial \Theta}{\partial u}, \quad \Theta_2 = \frac{\partial \Theta}{\partial v}, \dots, \quad J = \frac{\partial \Theta_1}{\partial x} + \frac{\partial \Theta_2}{\partial y} + \frac{\partial \Theta_3}{\partial z},$$

$$\Psi_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, \quad \Psi_2 = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}, \dots$$

Eine Transformation der Gleichung (9) zu einem anderen Koordinatensystem  $x' y' z'$  ergibt ähnliche Gleichungen mit Werten von  $s'_1 s'_2 s'_3$  an Stelle der  $s_1 s_2 s_3$ , die Projektionssummen der auf die  $xyz$  aufgetragenen  $s_i$ -Werte auf die neuen Achsen vorstellen. Die  $s_1 s_2 s_3$  sind also als Komponenten eines vom Koordinatensystem unabhängig gerichteten Vektors anzusehen. Wir werden seine Richtung mit jener der magnetischen Kraft identifizieren, falls das Medium einer solchen unterworfen ist. Bei *Abwesenheit* derselben ergibt sich, falls in (7) die  $b_{ij}$ , daher in (9) die  $\Psi$  weggelassen werden, das System der Fresnelschen Doppelbrechungsgleichungen, jedoch erweitert auf ein absorbierendes Medium. Es bedeutet dann  $uvw$  den Fresnelschen Lichtvektor. Die Unterdrückung der  $c_{ij}$  in (7), d. h. der  $\Theta$  in (9), ergibt die Neumannschen Gleichungen und  $uvw$  bedeutet den Neumannschen Vektor. Rechnen wir mit dem Fresnelschen Vektor, so können für ein durchsichtiges Medium die Koeffizienten  $c_{ij}$  des  $\Theta$  in (7) und ebenso auch jene von  $F(\nu)$  nur für die geraden Potenzen von  $\nu = ni$  von Null verschieden sein. In diesem Falle lässt sich die wesentlich reale Funktion  $\Theta$  bei passender Wahl des Koordinatensystems auf  $2\Theta = C_{11}u^2 + C_{22}v^2 + C_{33}w^2$  zurückführen. Es existieren daher drei von der Farbe abhängige optische Elastizitätsachsen. Eine Erweiterung dieser Fresnelschen Theorie durchsichtiger Medien ergibt sich aus (9), wenn daselbst die  $s$  weggelassen, aber die  $\Psi$  beibehalten werden. Wie in der erwähnten Abhandlung nachgewiesen wird, pflanzen sich dann nach jeder Richtung immer noch zwei zueinander senkrecht linear polarisierte Wellen fort, deren ungleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeiten für zwei Richtungen, die optischen Achsen, gleich werden; optische Symmetrieebenen sind aber nicht mehr vorhanden. So z. B. gibt es einachsige Kristalle ohne ordentlichen Strahl. Hiervon hat man bis jetzt keine experimentelle Evidenz.

Wir kehren zu unserem Thema zurück. Wir operieren, wie bemerkt, mit dem Fresnelschen Vektor, setzen also für ein doppelbrechendes Medium, das die Fresnelschen Gesetze befolgt, in (9) die  $\Psi, s$  der Null gleich. Tritt das Feld auf, so sollen sich nicht nur die Koeffizienten des  $\Theta$  ändern, sondern es sollen auch die bis jetzt der Null gleichen Koeffizienten  $s_1, s_2, s_3$  von Null verschiedene Werte annehmen. Nebenbei könnten wir allgemeinheitshalber voraussetzen, daß infolge Feldwirkung auch die Koeffizienten von  $\Psi$ , die ohne Feld Null waren, von Null verschieden werden. Dies bedeutet, daß die „reine“ von den  $s_1, s_2, s_3$  befreite Doppelbrechung die Fresnelschen Doppelbrechungsgesetze nicht mehr befolgen würde. Einfachheitshalber ist diese zweite Annahme unterblieben.

Die Differentialgleichungen (9) führen dann vor allem zu dem Resultat, daß sich in einer beliebigen Richtung zwei elliptisch polarisierte Wellen fortpflanzen. War speziell das Medium ohne Feld isotrop, so wird es einachsig doppelbrechend mit der Feldrichtung als Symmetriearchse. Als nächste Ursache der reinen Doppelbrechung könnte man die Kräfte der Magnetostriktion heranziehen, d. h. die Tendenz der Kraftlinien, sich längs des Feldes zusammenzuziehen und quer zu demselben auszudehnen. Über diese Doppelbrechung superponiert sich die rotationelle Wirkung des Feldes. Es werden sich längs desselben entgegengesetzt zirkulare, quer zu demselben senkrecht zueinander linear polarisierte Wellen fortpflanzen können.

Die Dispersions- und Absorptionsverhältnisse haben sich jedenfalls geändert und es wird unsere Aufgabe sein, zu zeigen, welche Annahmen nötig sind, damit an Stelle eines ursprünglichen Absorptionsstreifens deren mehrere auftreten können. Ersichtlich wird es zuvor notwendig sein, die Möglichkeit der Dispersion in dem allereinfachsten Falle eines unmagnetisierten isotropen Mediums als Folgerung der Gleichung (9) nachzuweisen. Aus der Form derselben ergibt sich für das Quadrat des komplexen Brechungsindex  $(N - ik)^2$  eine rational gebrochene Funktion von  $v = ni$  mit reellen Koeffizienten, also

$$(N - ik)^2 = \frac{\Phi(v)}{\Psi(v)}.$$

Dieser wichtige Satz läßt sich, wie später gezeigt wird, direkt herleiten.

Die Wurzeln  $h_j$  von  $\Psi(\nu) = 0$  sind reell, rein imaginär oder komplex konjugiert. Daher ist  $(N - ik)^2$  zerfällbar in eine ganze Funktion von  $\nu$  und in Teilbrüche der Form

$$\frac{A}{\nu - h_j}.$$

Der zu einer *reellen* Wurzel  $h_j$  gehörige Teilbruch führt, weil  $\nu = ni$  imaginär ist, kein Unendlichwerden von  $(N - ik)^2$  herbei. Es tritt dies aber ein für eine der rein imaginären Wurzeln  $h_j = \pm i \cdot n_j$  und zwar an der Stelle  $\nu = n_j i$ . Durch Zusammenziehen beider zu  $h_j = i n_j$  gehöriger Teilbrüche ergibt sich für *einen* der Summanden von  $(N - ik)^2$  der Ausdruck

$$\frac{B_j}{n^2 - n_j^2},$$

also schon ein Term der Kettelerschen Dispersionsformel, wobei nur das Zeichen von  $B_j$  so zu wählen ist, daß der Kundtschen Regel genügt wird. Das Unendlichwerden von  $(N - ik)^2$  mildert sich zu einem sehr Großwerden, wenn  $h_j = p_j \pm q_j i$  ist, und  $p_j$  gegen  $q_j$  sehr klein ist. Man sieht, daß die Möglichkeit auswählender Absorption durch den Charakter der Nennerwurzeln bedingt ist.

Könnte man zugeben, daß der Nenner  $\Psi(\nu)$  vielfache Wurzeln besäße, so läge es nahe, den Einfluß des Feldes darin zu suchen, daß es diese Wurzeln ungleich macht und zwar in verschiedener Weise je nach Richtung und Polarisationsart des durch das magnetisierte Medium hindurchgesendeten Strahles; es entstünden dann an Stelle eines Urstreichens deren *mehrere*. Indes zeigt eine genauere Analyse, daß bei Abwesenheit des Feldes der Nenner *keine vielfachen* Wurzeln haben kann, da ja sonst für gewisse  $n = 2\pi/\tau$  das Produkt aus dem wesentlich positiven realen Brechungsindex  $N$  und eben solchem Absorptionsindex  $k$  negativ würde, was vollständig ausgeschlossen ist, da ja die Intensität einer Welle längs ihrer Fortpflanzungsrichtung nicht steigen kann, wenn die Gesetze der Thermodynamik richtig bleiben sollen.

Dies führt zu der weiteren Frage, wie der Ausdruck des komplexen Brechungsindexquadrates  $(N - ik)^2$  abzuändern ist, wenn durch Feldwirkung ein ursprünglicher Streifen in  $r$  Streifen zerfallen soll. Diese Aufgabe ist rein algebraischer Natur

und läßt sich bei unendlich feinen Absorptionsstreifen für jede der beiden Polarisationsarten einer gegebenen Wellennormale so lösen, daß sowohl bezüglich der Lage als auch der Intensitäten der zerfallenen  $r$  Streifen Übereinstimmung mit der Erfahrung erreicht wird. Setzen wir beispielsweise einen einzigen Urstreifen voraus, so besteht die Lösung darin, daß man  $(N - ik)^2$  zu einer rational gebrochenen Funktion von

$$\mu = \nu^2 - 2\nu p_j + p_j^2 + q_j^2$$

macht, worin  $p_j \pm q_j i$  die dem Urstreifen zugeordneten Nennerwurzeln vorstellen. Dadurch wird  $(N - ik)^2$  von selbst eine rational gebrochene Funktion von  $\nu$ . Der Grad des Nenners bezüglich des  $\mu$  entspricht der Zahl der Zeemankomponenten. Die vom Felde abhängigen und mit ihm verschwindenden reellen Koeffizienten können stets so gewählt werden, daß man bei Abwesenheit desselben zum Urstreifen zurückgelangt.

Dieses Resultat bedeutet nur insofern einen wirklichen Gewinn, als man weiß, wie die Koeffizienten von  $\Theta$ ,  $\Psi$ ,  $s$  in (9) von  $\nu$  abhängen haben. Bei Voraussetzung eines einzigen Urstreifens im unmagnetischen isotropen Medium ergeben sich aus (9) im axialen Effekt je  $r$  links und rechts zirkulare Streifen (die  $a$ -Streifen) und ebensoviel linear polarisierte  $s$ - und  $p$ -Streifen des Transversaleffektes.

Zeeman-Effekte von diesem Typus sind bis jetzt noch nicht gefunden worden; vielmehr zeigt sich, daß die Gesamtzahl der axialen Streifen  $a$  stets kleiner ist als jene der  $s$ - und  $p$ -Streifen zusammengenommen.

Es wird gezeigt, daß dieser Erfahrungstatsache genügt werden kann durch die Annahme, daß in dem Ausdrucke für das  $(N - ik)^2$  der axialen Wellen sich gewisse Polynome im Zähler und Nenner kürzen. Hieraus folgt dann unmittelbar, daß die Zahl der  $s$ -Streifen mit der Gesamtzahl der  $a$ -Streifen identisch sein muß, und daß beide Streifensysteme sogar zusammenfallen müssen, wenn eine gewisse (aus L. Geigers Messungen sich ergebende) Dispersionskonstante relativ kleine Werte besitzt. Unter eben dieser Bedingung zeigt sich ferner, daß wenn man von der axialen Lage aus sich zur transversalen bewegt, neue linear polarisierte Streifen mit elektrischen Schwingungen (parallel der durch das Feld gelegten Meridianebene)

aufzutauchen und schließlich in die  $p$ -Streifen übergehen. Gleichzeitig verwandeln sich die zirkularen  $a$ -Streifen in entgegengesetzte elliptische und münden in den  $s$ -Streifen. Alles dies ist mit der Erfahrung in Übereinstimmung.

Betreffs der Intensität und Lage der  $p$  Streifen sagt die Theorie nichts aus; sie bleiben willkürlich wählbar. Nimmt man an, ihre Zahl sei die Hälfte der  $s$ -Streifen, so führt eine sehr einfache Konstruktion zu Ergebnissen, welche Voigt für die komplizierteren Phänomene in Gasen abgeleitet hat. Den Schluß des Aufsatzes bildet eine Exemplifikation unserer Theorie auf die einfache Elektronentheorie des normalen Triplets.

#### Dispersion in unmagnetisierten nicht aktiven isotropen Medien.

1. Man setze in (9)

$$\Psi = 0, \quad s_1 = s_2 = s_3 = 0, \quad 2\Theta = c_{11}(u^2 + v^2 + w^2).$$

Dies gibt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} F(\nu) = c_{11} \Delta u \text{ usw.}$$

Für die (komplexe) Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $\omega$  ebener Wellen mit zusammenfallender Wellen- und Extinktionsnormale folgt

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{F(\nu)}{c_{11}(\nu)}$$

und wenn für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum  $\bar{v}$  gesetzt wird, bei Rücksicht auf (8)

$$(10) \quad (N - i k)^2 = \frac{(\nu^2 - \alpha_0 - \alpha_1 \nu - \alpha_2 \nu^2 \dots)}{\nu^2 c_{11}(\nu)} \cdot \bar{v}^2.$$

Dieses schon früher erwähnte Resultat läßt sich auch direkt herleiten.

Es genügt vorauszusetzen, daß der Lichtvektor drei partialen Differentialgleichungen mit realen Koeffizienten zu genügen hat. Annahme der Transversalität nicht notwendig. Irgend ein Aggregat der Differentialgleichungen hat die Form

$$a_{\tau, \xi, \eta, \zeta} \cdot \frac{\partial^{\tau}}{\partial t^{\tau}} \frac{\partial^{\xi}}{\partial x^{\xi}} \frac{\partial^{\eta}}{\partial y^{\eta}} \frac{\partial^{\zeta}}{\partial z^{\zeta}} \left\{ \begin{array}{l} u \\ v \\ w \end{array} \right\},$$

wobei  $\tau, \xi, \eta, \zeta$  für den Augenblick ganze Zahlen bedeuten sollen und  $a_{\tau, \xi, \eta, \zeta}$  eine Konstante ist.

Da den Differentialgleichungen Integrale der Form

$$(11) \quad \begin{cases} u \\ v \\ w \end{cases} = \begin{cases} A \\ B \\ C \end{cases} e^{\nu(t - lx - my - nz)}$$

genügen, so tritt nach Substitution von (11) an Stelle des obigen Aggregates der Ausdruck

$$a_{\xi}, \xi, \eta, \zeta \nu^x (-l\nu)^{\xi} (-m\nu)^{\eta} (-n\nu)^{\zeta} \begin{cases} A \\ B \\ C \end{cases}.$$

Jede der drei Differentialgleichungen nimmt, nach  $A, B, C$  geordnet, die Form an

$$(11a) \quad A\varphi + B\psi + C\chi = 0,$$

worin  $\varphi, \psi, \chi$  ganze rationale Funktionen der  $\nu, l, m, n$  und der Konstanten der Differentialgleichungen vorstellen.

Aus den drei Gleichungen (11a) ergibt sich durch Elimination von  $A, B, C$  eine Gleichung, die sich als Summe homogener Funktionen verschiedenen Grades von  $l, m, n$  darstellen lässt in der Form

$$(12) \quad \left\{ a_0 + (a_1 l + b_1 m + c_1 n) + (a_{11} l^3 + a_{22} m^3 + \dots 2a_{12} lm \dots) + f_r(l, m, n) + \dots = 0 \dots \right.$$

Dabei ist  $f_r(l, m, n)$  eine der homogenen Funktionen vom Grade  $r$ . Die Koeffizienten sind ganze Funktionen von  $\nu$  mit realen Koeffizienten, die sich rational aus den Konstanten der Differentialgleichungen bilden lassen. Wir setzen nun

$$(12a) \quad l = \frac{l_0}{\omega'} - i \frac{k' l_1}{V}, \quad m = \frac{m_0}{\omega'} - i \frac{k' m_1}{V}, \quad n = \frac{n_0}{\omega'} - i \frac{k' n_1}{V}.$$

Darin bedeuten  $l_0 m_0 n_0$  bzw.  $l_1 m_1 n_1$  die realen Richtungskosinus der Phasen- bzw. Extinktionsnormalen,  $\omega'$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Ebenen gleicher Phasen und  $k'$  eine wesentlich positive Absorptionskonstante. Die Einführung in (11) ergibt,  $\nu = i 2 \pi / \tau$  gesetzt,

$$\begin{cases} u \\ v \\ w \end{cases} = \begin{cases} A \\ B \\ C \end{cases} \left\{ e^{\frac{2\pi i}{\tau} \left( t - \frac{l_0 x + m_0 y + n_0 z}{\omega'} \right)} \cdot e^{-k' \cdot \frac{2\pi}{\lambda} (l_1 x + m_1 y + n_1 z)} \right\}$$

( $\lambda = \tau V$  ist dabei die Wellenlänge im Vakuum).

Es sollen nun die beiden Normalen eine im Raume vorgeschriebene Lage besitzen, und die  $l_0 m_0 n_0 l_1 m_1 n_1$  zum Koordinatensystem  $x y z$  gehören.

Die einem anderen System  $x' y' z'$  zugehörigen  $l'_0 m'_0 n'_0 l'_1 m'_1 n'_1$  lassen sich aus den zu  $x y z$  gehörigen Werten durch Summen von Projektionen bilden; es haben also auch die  $l, m, n$  in (12a) Vektorcharakter.

Andererseits folgt aus dem Begriffe der Isotropie, daß die Konstanten in den Differentialgleichungen sich nicht ändern können, wenn statt der Vektorkomponenten  $u, v, w$  die zum System  $x' y' z'$  gehörigen Werte  $u' v' w'$  eingeführt werden. Hieraus folgt, daß auch die Eliminationsgleichung (12) gültig bleiben muß, wenn an Stelle von  $lmn$  die  $l'm'n$ -Werte eingeführt werden. Speziell wird für jede der homogenen Funktionen in (12) gelten

$$(13) \quad f_r(l, m, n) = f_r(l', m', n').$$

Da den zu  $x y z$  entgegengerichteten Achsen die Werte

$$l' = -l, \quad m' = -m, \quad n' = -n$$

entsprechen, müssen in (12) alle ungeradzahligen Funktionen fortfallen. Läßt man  $z'$  mit  $z$  koinzidieren, schließt aber die  $z$  und  $x'$  den Winkel  $\varphi$  ein, so gilt

$$l' = l \cos \varphi + m \sin \varphi, \quad m' = -l \sin \varphi + m \cos \varphi, \quad n' = n.$$

Setzt man die einem sehr kleinen  $\varphi$ -Winkel entsprechenden Werte

$$l' = l + m \varphi, \quad m' = -l \varphi + m, \quad n' = n$$

in (13) ein, so ergibt sich

$$m \frac{\partial f_r(l, m, n)}{\partial l} = l \frac{\partial f_r(l, m, n)}{\partial m}.$$

Daher auch bei Rücksichtnahme auf Drehungen um andere Koordinatenachsen:

$$\frac{\partial f_r}{\partial l} = C \cdot l, \quad \frac{\partial f_r}{\partial m} = C m, \quad \frac{\partial f_r}{\partial n} = C n,$$

$C$  ist offenbar wieder eine homogene Funktion, jedoch vom Grade  $r - 2$ ; zufolge eines bekannten Satzes gilt

$$l \frac{\partial f_r}{\partial l} + m \frac{\partial f_r}{\partial m} + n \frac{\partial f_r}{\partial n} = r f_r(l, m, n) = C(l^2 + m^2 + n^2).$$

Es hat also  $f_r(l, m, n)$  den Faktor  $l^2 + m^2 + n^2$ , der sich mit Änderung des Koordinatensystems nicht ändert. Es gilt daher laut (13)

$$C(l, m, n) = C(l', m', n').$$

Daher hat auch  $C$  den Faktor  $l^2 + m^2 + n^2$ . So weiter schließend findet man

$$f_r(l, m, n) = b_{r/2}(l^2 + m^2 + n)^{r/2} \quad (r \text{ ist nämlich gerade}).$$

An Stelle von (12) tritt dann

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = b_0 + b_1(l^2 + m^2 + n^2) + b_2(l^2 + m^2 + n^2)^2 \dots \\ \qquad \qquad \qquad + b_s(l^2 + m^2 + n^2)^s. \end{array} \right.$$

$b_0, b_1, \dots, b_s$  sind wieder ganze Funktionen von  $\nu$  mit realen Koeffizienten.

Aus (12a) folgt, den Winkel zwischen beiden Normalen mit  $\chi$  bezeichnet,

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} l^2 + m^2 + n^2 = \frac{1}{\omega'^2} - \frac{k'^2}{V^2} - \frac{2ik' \cos \chi}{V\omega'} \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{N'^2 - k'^2 - 2k'N'\cos\chi \cdot i}{V^2}, \end{array} \right.$$

Für sogenannte homogene Wellen ( $\chi = 0$ ) gilt

$$(16) \quad l^2 + m^2 + n^2 = \left( \frac{N - ik}{V} \right)^2,$$

wobei  $Nk$  die Hauptindizes der Brechung und Absorption vorstellen. Die Auflösung von (14) nach  $l^2 + m^2 + n^2$  ergibt hierfür  $s$  Wurzelwerte, die nur von  $\nu$  und den Konstanten des Mediums abhängen.

Aus (15) und (16) folgt dann der bekannte Satz

$$(N - ik)^2 = N'^2 - k'^2 - 2ik'N'\cos\chi.$$

Soll sich in einer Richtung nur eine Welle fortpflanzen können, muß in (14)  $s = 1$  gesetzt werden.

Dies gibt

$$l^2 + m^2 + n^2 = -\frac{b_0}{b_1} = \frac{(N - ik)^2}{V^2} = \frac{\Phi(\nu)}{\Psi(\nu)},$$

worin  $\Phi(\nu)$   $\Psi(\nu)$  ganze Funktionen von  $\nu$  mit realen Koeffizienten bedeuten. Da im allgemeinsten Falle der Zählergrad höher sein wird als der des Nenners, wird  $(N - ik)^2$  aus zwei

Teilen bestehen. Der erste derselben ist ein endliches Polynom der Form  $A_0 + A_1 \nu + A_2 \nu^2 \dots$ , welches für  $\nu = \infty$  unendlich groß wird, eventuell konstant bleibt, wenn alle  $A$  bis auf  $A_0$  Null werden. Der zweite Teil, eine echt gebrochene Funktion, die für  $\nu = \infty$  zu Null konvergiert, läßt sich in Partialbrüche zerlegen, welche den Nennerwurzeln  $\Psi(\nu) = 0$  entsprechen. Sind dieselben insgesamt reell und von Null verschieden, so wird  $(N - ik)^2$  nur für  $\nu = \infty$  unendlich groß werden, auswählende Absorption ist nicht vorhanden. Hat der Nenner Nullwurzeln, so kann  $(N - ik)^2$  auch für  $\nu = 0$  unendlich groß werden. Ein Beispiel hierfür (Absorption in Metallen) bietet Maxwells Theorie leitender Medien. Aus der Formel

$$(N - ik)^2 = K + \frac{4\pi\bar{\gamma}}{\nu} \bar{V}^2,$$

worin  $K$  die Dielektrizitätskonstante,  $\bar{\gamma}$  die elektromagnetisch gemessene Leitfähigkeit bedeutet, sieht man, daß  $(N - ik)^2$  für  $\nu = \infty$  zu  $K$ , für  $\nu = 0$  zu  $\infty$  konvergiert.

Ersichtlich müssen alle Dispersionstheorien, die mit einem optischen Kontinuum operieren, in unserer Theorie enthalten sein. Aber dies gilt auch von jenen, welche neben einem kontinuierlichen Äther noch materielle Gebilde voraussetzen, welche elektrischer oder mechanischer Schwingungen fähig sind. Diese letzteren sind durch gewisse Parameter  $\alpha, \beta, \gamma$  charakterisiert, welche linearen Differentialgleichungen zu genügen haben. Eliminiert man die  $\alpha, \beta, \gamma$  aus diesen und den Äthergleichungen durch wiederholte Anwendung von Derivationsprozessen, so müssen die Endgleichungen in jenen enthalten sein, die wir zum Ausgangspunkt unserer allgemeinen Dispersionstheorie gemacht haben. Diese Gruppe von Theorien basiert bekanntlich auf dem Sellmeierschen Resonanzprinzip; ihm entspricht auswählende Absorption, und dieser in unseren Gleichungen das Vorhandensein komplex konjugierter Wurzeln von  $\Psi(\nu) = 0$ . In allen Theorien dieser Gruppe konvergiert  $(N - ik)$  für  $\nu = \infty$  zu einer endlichen limite, dem realen Brechungsindex des intramolekularen Äthers, da zufolge des Resonanzprinzipes die materiellen Gebilde unendlich schnellen Schwingungen ( $\nu = \infty$ ) des Äthers nicht folgen können, sohin die Wellenbewegung nur im Äther erfolgt.

Für unendlich langsame Schwingungen ( $\nu = 0$ ) kommen zwar die Eigenschwingungen der Gebilde auch nicht zur Geltung; immerhin ist es aber möglich, daß die Gebilde einen mechanischen oder dielektrischen Ballast des Äthers bilden und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Äther herabsetzen. Die Kettelersche Gruppe führt beispielsweise zu einer endlichen realen  $\limite$ ; dagegen führt Helmholtz' erste mechanische Theorie für  $\nu = 0$  zu  $(N - ik)^2 = \infty$ . Gegenwärtig kennt man die Dispersionskurve einzelner durchsichtiger Medien (wie Steinsalz, Fluorit) in sehr weiten Spektralgebieten und kommt hierbei mit der Kettelerschen Formel gut aus. Dies schließt jedoch nicht aus, daß es bei Erweiterung des  $\nu$ -Gebietes auch noch der Fall sein müßte, da ja das Vorkommen realer Nennerwurzeln theoretisch nicht ausgeschlossen ist.

2. Wir untersuchen, des folgenden wegen, nur den Fall, wo sich  $(N - ik)^2$  darstellen läßt durch

$$(17) \quad (N - ik)^2 = A + \frac{f(\nu)}{\varphi(\nu)},$$

worin  $A$  eine reale Konstante,  $f(\nu)/\varphi(\nu)$  eine echt gebrochene Funktion vorstellen. Der Nenner  $\varphi(\nu) = 0$  soll nur komplexe konjugierte Wurzeln der Form  $\nu_r = p_r \pm q_r i$  besitzen. Es ist dann, einfache Wurzeln vorausgesetzt, ein Teilbruch gegeben durch

$$(18) \quad \frac{P_r \pm Q_r i}{\nu - p_r \mp q_r i}, \quad \text{wobei } P_r \pm Q_r i = \frac{f(p_r \pm q_r i)}{\varphi'(p_r \pm q_r i)}.$$

Durch Zusammenziehen beider Teilbrüche hat man

$$(18a) \quad \left\{ \begin{aligned} (N - ik)^2 &= A + \sum_{r=1}^s \left[ \frac{P_r + Q_r i}{\nu - p_r - q_r i} + \frac{P_r - Q_r i}{\nu - p_r + q_r i} \right] \\ &= A + 2 \sum_{r=1}^s \frac{P_r \nu - p_r P_r - q_r Q_r}{(\nu - p_r)^2 + q_r^2}, \end{aligned} \right.$$

und nach Trennung des Realen vom Imaginären und bei Einführung der Abkürzung  $p_r^2 + q_r^2 = n_r^2$

$$(19) \quad N^2 - k^2 = A + 2 \sum_{r=1}^{s=8} \frac{(q_r Q_r - p_r P_r)(n_r^2 - n_r'^2) - 2 P_r p_r n_r^2}{(n_r^2 - n_r'^2)^2 + 4 p_r^2 n_r^2},$$

$$(20) \quad 2Nk = 2n \sum_{r=1}^s \frac{(n^2 - n_r^2) P_r + 2 p_r (P_r p_r + Q_r q_r)}{(n^2 - n_r^2)^2 + 4 p_r^2 n^2}.$$

Man kann diese Formeln auch noch anders schreiben, wenn zwei neue Größen  $F_r$ ,  $G_r$  eingeführt werden, welche durch die Gleichungen

$$(20') \quad F_r \cdot n_r^2 = q_r Q_r + p_r P_r, \quad G_r \cdot n_r^2 = p_r Q_r - P_r q_r$$

definiert sind. Es ergibt sich dann

$$(19a) \quad N^2 - k^2 = A' + 2n^2 \sum_{r=1}^s \frac{2 p_r (p_r F_r + q_r G_r) + F_r (n^2 - n_r^2)}{(n^2 - n_r^2)^2 + 4 p_r^2 n^2},$$

$$(20a) \quad 2Nk = 2n \sum_{r=1}^s \frac{2 p_r F_r n_r^2 + (n^2 - n_r^2) (p_r F_r - q_r G_r)}{(n^2 - n_r^2)^2 + 4 p_r^2 n^2}.$$

Die reale Größe  $A'$  ist dabei der Grenzwert des  $N^2 - k^2$  für  $n = 0$  (unendlich lange Wellen). Das zugehörige  $k$  ist Null. In dieser Form sind die Dispersionsformeln in meiner erwähnten Arbeit angeführt. Sind die Nennerwurzeln rein imaginär, wird  $p_r = 0$ . Die Summe zweier konjugierter Teilbrüche ist wesentlich real, wenn der Zähler  $f(\nu)$  nur gerade  $\nu$  Potenzen enthält, was notwendig ist, da ja  $(N - ik)^2$  real sein muß, wenn das Medium durchsichtig sein soll ( $k = 0$ ). In diesem Falle ist laut (20) auch  $P_r = 0$  und laut (20') auch  $G_r = 0$ . Daher (vgl. (19a), (20a)) gilt:

$$N^2 = A' + 2n^2 \sum_{r=1}^s \frac{F_r}{n^2 - n_r^2} = A' + 2n^2 \sum_{r=1}^s \frac{Q_r}{n_r^2 (n^2 - n_r^2)}$$

oder

$$(21) \quad N^2 = A' + \sum_{r=1}^s \frac{B_r}{\lambda_r^2 - \lambda^2}, \quad B_r = \frac{2 Q_r}{n_r} \lambda_r^2.$$

Man sieht, daß  $N$  für  $\lambda = \lambda_r$  unendlich groß ist. Wählt man  $Q_r$  stets negativ, so wird, wenn man sich dem  $\lambda_r$  von der Seite der langen Wellen nähert,  $N^2$  zu  $+\infty$  anwachsen, so dann nach Überschreitung des  $\lambda_r$  auf  $-\infty$  sinken. Da  $N^2$  eine Zahl ist, muß laut (21)  $2 Q_r / n_r$  gleichfalls eine reine Zahl sein.

3. Ist  $p_r$  nicht Null, sondern sehr klein gegen  $q_r$ , so wird  $P_r$ , das für  $p_r = 0$  Null ist, gegen  $Q_r$ , das negativ bleiben

muß, wenn die Kundtsche Regel gültig bleiben soll, gleichfalls klein sein müssen. Infolge der Formel

$$P_r + Q_r i = \frac{f(p_r + q_r i)}{\varphi'(p_r + q_r i)},$$

worin  $f$  und  $\varphi'$  rationale ganze Funktionen ihrer Argumente sind, wird  $P_r$  eine Größe der Ordnung  $p_r$  oder noch kleiner sein.

Beschränken wir uns nun auf solche Gebiete eines Absorptionsstreifens, in welchen  $n - n_r$  eine Größe der Ordnung  $p_r$  ist, so dürfen wir für die vom  $r^{\text{ten}}$  Absorptionsstreifen herührenden Anteile  $I$ ,  $II$  zu  $N^2 - k^2$  bzw.  $2Nk$  bis auf Größen der Ordnung  $p_r^2$  setzen

$$\begin{aligned} n_r^2 = q_r^2 + p_r^2 &= q_r^2, \quad I = \frac{2 q_r Q_r (n^2 - n_r^2)}{(n^2 - n_r^2)^2 + 4 p_r^2 n_r^2} = \frac{(n - n_r) Q_r}{(n - n_r)^2 + p_r^2}, \\ II &= \frac{2 n_r \cdot 2 p_r Q_r q_r}{(n^2 - n_r^2)^2 + 4 p_r^2 n_r^2} = \frac{Q_r p_r}{(n - n_r)^2 + p_r^2}. \end{aligned}$$

Man sieht, daß  $II$  an der Stelle  $n = n_r$  sehr groß wird von der Ordnung  $1/p_r$ , während es laut (20) an entfernten Stellen von der Ordnung  $p_r$  ist. Bis auf Größen der Ordnung  $p_r^2$  ist also in der Nähe eines Absorptionsstreifens der Wert des  $II$  maßgebend für  $2Nk^1)$ , also

$$(22) \quad 2Nk = \frac{Q_r p_r}{(n - n_r)^2 + p_r^2}.$$

Der Maximalwert von  $2Nk$  ist also  $Q_r/p_r$ .

Da  $N$  und  $k$  wesentlich positiv,  $Q_r$  wesentlich negativ ist, ist  $p_r$  wesentlich negativ. Desgleichen dürfen wir in der Nähe eines Absorptionsstreifens setzen

$$(23) \quad N^2 - k^2 = A_r + \frac{Q_r (n - n_r)}{(n - n_r)^2 + p_r^2}.$$

Dabei ist  $A_r$  der (endliche) Wert des  $N^2 - k^2$  an der Stelle des  $r^{\text{ten}}$  Streifens, wenn dieser nicht vorhanden wäre. Ersichtlich liegt ein Maximominimum von  $N^2 - k^2$  an der Stelle  $n = n_r \pm p_r$ , und zwar weil  $Q_r$  negativ ist, das Maximum bei

1) Da die  $2\pi$  fache Schwingungszahl  $n$  im Sekundenmaße nach Billionen zählt, wird es sich empfehlen, als Einheit der Schwingungszahl etwa jene einer bestimmten Spektrallinie zu setzen; es ist dann  $q_r$ ,  $n_r$ ,  $n$  eine mäßige Zahl und  $p_r$  dagegen sehr klein im gewöhnlichen Sinne des Wortes.

$n = n_r + p_r$ , d. h. weil  $p_r$  negativ ist, auf der roten Seite von  $n = n_r$ . Sein Betrag ist

$$A_r + \frac{Q_r}{2 p_r}.$$

Das Minimum im Betrage

$$A_r - \frac{Q_r}{2 p_r}$$

liegt gleichweit von  $n = n_r$  auf der violetten Seite bei  $n = n_r - p_r$ . Da nun (Metalle ausgenommen)  $k^2$  gegen  $N^2$  zu vernachlässigen ist, so gilt das von  $N^2 - k^2$  Gesagte auch von  $N^2$  und  $N$ . Der Wert von  $N^2$  an der Stelle  $n = n_r$  ist  $A_r$ . Es läßt sich leicht zeigen, daß die Stelle  $n = n_r$  nicht nur die Lage des Maximums von  $2 N k$ , sondern auch jene des Maximums von  $k$  vorstellt.

Setzt man in (22), (23)

$$x = (n - n_r)/p_r,$$

ferner

$$Q_r/p_r = 2 \bar{k} \sqrt{A_r} = H,$$

wobei  $\bar{k}$  den Wert des  $k$  an der Stelle  $n = n_r$  vorstellt, so folgt

$$(24) \quad N^2 - k^2 = A_r + \frac{Hx}{1+x^2}, \quad 2 N k = \frac{H}{1+x^2}.$$

Die Größe  $H$  ist, Metalle ausgenommen, sehr klein von der Ordnung  $\bar{k}$ ; denn  $A_r$  ist endlich. Aus den zwei letzten Gleichungen folgt

$$N^2 + k^2 = \sqrt{A_r^2 + 2 H A_r \frac{x}{1+x^2} + \frac{H^2}{1+x^2}},$$

$$2 k^2 = \sqrt{\left(A_r + \frac{Hx}{1+x^2}\right)^2 + \frac{H^2}{(1+x^2)^2}} - \left(A_r + \frac{Hx}{1+x^2}\right).$$

Mit Rücksicht auf die Kleinheit von  $H$  läßt sich auch setzen

$$(24a) \quad 4 k^2 = \frac{H^2}{(1+x^2)} : A_r \left[ (1+x^2) + \frac{Hx}{A_r} \right].$$

Setzt man in erster Annäherung  $H/A_r$  (im Nenner) Null, so liegt das Maximum von  $k$  bei  $x = 0$ , d. h. bei  $n = n_r$ . In Wahrheit liegt es bei einem sehr kleinen  $x$ , das sich durch Nullsetzung des nach  $x$  derivierten Nenners finden läßt. Die Rechnung gibt den besseren Wert

$$x = \frac{n - n_r}{p_r} = - \frac{H}{4 A_r} \quad \text{oder} \quad n = n_r - p_r \frac{H}{4 A_r}.$$

Der Unterschied  $n - n_r$  ist sehr klein gegen das Achtel der Distanz  $-2p_r$  zwischen  $N_{\max}$  und  $N_{\min}$ . Es gilt daher

$$k_{\max} = \frac{H}{2\sqrt{A_r}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{H^2}{4A_r^2}}} = \bar{k} \text{ (angenähert).}$$

Das Maximum von  $k$  liegt also sehr angenähert an der Stelle des Maximums von  $2Nk$ . Gleichheit hiervon liegen auf der roten Seite das Maximum, auf der violetten das Minimum von  $N$ ; an der Stelle  $n = n_r$  hat  $N$  den Wert  $\sqrt{A_r}$ , den es hätte, wenn der Absorptionsstreifen gar nicht vorhanden wäre, also bei Gasen angenähert den Wert 1.

4. Wir haben gesehen, daß  $P_r$  eine kleine Größe der Ordnung  $p_r$  oder noch kleiner sein muß. Wir wollen jetzt zeigen, daß — einen einzigen Absorptionsstreifen vorausgesetzt — das letztere gelten muß, wenn der Wert von  $2Nk$  im Bereich  $n=0$  bis  $\infty$  nie negativ sein soll.

In diesem Falle ist laut (20)

$$\frac{Nk}{n} = \frac{(n^2 - n_r^2)P_r + 2p_r(P_r p_r + Q_r q_r)}{(n^2 - n_r^2)^2 + 4p_r^2 n^2}.$$

Da auch die Größe linker Hand stets positiv bleiben soll, darf der Zähler rechter Hand für kein positives  $n = n'$  Null werden, weil ja in der Nachbarschaft positive und negative Werte vorkämen. Aus der Gleichung

$$(25) \quad n'^2 = n_r^2 - 2p_r^2 - 2p_r \frac{Q_r q_r}{P_r}$$

folgt, daß die rechte Seite negativ sein muß, da sonst  $n'$  real und positiv sein könnte. Wegen  $p_r Q_r q_r > 0$  muß  $P_r$  positiv und jedenfalls auch gegen das sehr kleine  $p_r$  so klein sein, daß der Bruch in (25) numerisch größer wird als  $n_r^2$ . Wir setzen im folgenden  $P_r$  direkt der Null gleich, ohne befürchten zu müssen, daß diese Vernachlässigung irgend einen Einfluß auf den Gang der Dispersion hätte. Und dies tun wir auch bei Anwesenheit von mehr als einem Absorptionsstreifen. Es ist dann  $2Nk$  sicherlich stets positiv.

Wir haben dann einfacher (vgl. Gleichung (19), (20))

$$(26) \quad N^2 - k^2 = A + 2 \sum_{r=1}^s \frac{q_r Q_r (n^2 - n_r^2)}{(n^2 - n_r^2)^2 + 4p_r^2 n^2},$$

$$(27) \quad 2Nk = 2n \sum_{r=1}^{r=s} \frac{2p_r q_r Q_r}{(n^2 - n_r^2)^2 + 4p_r^2 n_r^2}.$$

5. Es entsteht die für das Folgende wichtige Frage, ob die Nennerfunktion im Ausdrucke

$$(N - ik)^2 = A + \frac{f(\nu)}{\varphi(\nu)}$$

vielfache Wurzeln haben kann. Anscheinend könnte dies der Fall sein. Man konstruiere die zu jedem Streifen gehörige Partialkurve  $2Nk = y$ . Weit weg vom Streifen fällt sie mit der Abszissenachse der  $n$  zusammen, steigt von der roten Seite ausgehend rasch am Streifen in die Höhe, um sodann ebenso rasch abzufallen. Die algebraische Summe aller partiellen  $2Nk$ -Kurven ergibt das wirkliche  $2Nk$ . Es wäre nun denkbar, daß zwei verschiedene Streifen mit verschiedenem  $p_r, q_r$  sich so nähern, bis ihre  $p_r$  und  $q_r$  zusammenfallen. Dem entspräche ein Zusammenfallen zweier Partialkurven  $y = 2Nk$ . Dies ist nun durchaus kein Bild für eine Doppelwurzel, die Wurzel bleibt einfach, denn aus der Summe der zugehörigen Partialbrüche

$$\frac{P_r' + Q_r' i}{\nu - p_r' - q_r' i} + \frac{P_r + Q_r i}{\nu - p_r - q_r i}$$

entsteht wieder nur ein einziger Partialbruch, wenn  $p_r = p_r'$ ,  $q_r = q_r'$  wird.

Hat der Nenner  $\varphi(\nu)$  eine  $s$ fache Wurzel  $p_1 + q_1 i = \nu_1$ , so ergibt die Zerlegung in Partialbrüche Summanden der Form

$$\frac{A_s + B_s i}{(\nu - \nu_1)^s} + \frac{A_{s-1} + B_{s-1} i}{(\nu - \nu_1)^{s-1}} + \dots$$

Eine ähnliche Summandenreihe ist der konjugierten Wurzel  $\nu_1' = p_1 - q_1 i$  zugeordnet. Sehr nahe an  $\nu = \nu_1$  ist der Modul von  $(\nu - \nu_1) = i(n - q_1) - p_1$ , eine unendlich kleine Größe, während jener der konjugierten Wurzel

$$\nu - \nu_1' = \nu - p_1 + q_1 i = i(n + q_1) - p_1$$

endlich bleibt. Bis auf zu vernachlässigende Größen gilt also in der Nähe des Streifens

$$(N - ik)^2 = A + \frac{A_s + B_s i}{(\nu - \nu_1)^s}.$$

Es sei ferner

$$\frac{A_s + B_s i}{s^2} = R e^{i \Phi}, \quad q_1 - n = r \cos \varphi, \quad -p_1 = r \sin \varphi,$$

$$p^2 = p_1^2 + (n - q_1)^2,$$

daher

$$(28) \quad 2 N k = -\frac{R}{s^2} \sin(\Phi - s \pi - s \varphi).$$

Auf der roten Seite des Streifens ( $q_1 > n$ ), weit weg von ihm, hat  $\varphi$  wegen  $p_1 < 0$  einen sehr kleinen positiven Wert, welcher  $\lim_{n \rightarrow 0}$  mit  $\arctg(-p_1/q_1)$  identisch ist, bleibt beim Annähern an  $n = q_1$  im ersten Quadranten, erreicht bei  $n = q_1$  den Wert  $\pi/2$  und tritt für  $n > q_1$  (violette Seite) in den zweiten Quadranten und erreicht weit weg vom Streifen den Wert  $\pi$ .

Gibt es nur einfache Wurzeln ( $s = 1$ ), so ist dem früheren folge  $A_s$  (das frühere  $P_s$ ) gleich Null, und  $B_s$  (das frühere  $Q_s$ ) negativ, daher  $\Phi = \pi$  und  $2 N k = (R/r) \sin \varphi$  stets positiv, weil  $\varphi$  nur im ersten bzw. zweiten Quadranten enthalten ist.

Ist dagegen  $s > 1$ , etwa = 2, so wird  $2 \varphi$  angenähert von 0 bis  $2\pi$  laufen, es muß also  $2 N k$ , wenn es beispielsweise auf der roten Seite irgendwo positiv war, im anderen Gebiete negativ werden. Für ein beliebiges  $s$  wird  $s \varphi$  angenähert von 0 bis  $s\pi$  wachsen, wenn  $n$  von Null bis  $\infty$  geht.

Es werden dann sicherlich abwechselnd Gebiete von positiven und negativen  $2 N k$  vorkommen, was nicht möglich ist.

6. Eine Schichte der Dicke  $\delta$ , welche senkrecht vom Lichte durchsetzt wird, absorbiert per Flächeneinheit und Zeit-

einheit Lichtenergie im Betrage  $1 - e^{-\frac{4\pi k \delta}{\lambda}}$ , jene des auffallenden Lichtes gleich Eins gesetzt. Wählt man  $\delta$  sehr klein auch gegen  $\lambda$ , so beträgt diese Absorption, bezogen auf die Schichtdicke = 1

$$\frac{1 - e^{-\frac{4\pi k \delta}{\lambda}}}{\delta} = \frac{4\pi k}{\lambda}.$$

Ist  $J(n) dn$  die Intensität der auffallenden Strahlung zwischen  $n$  und  $n + dn$ , so beträgt die oben definierte Absorption im Intervalle  $n'$  bis  $n''$

$$J = 4\pi \int_{n'}^{n''} \frac{k}{\lambda} dn J(n).$$

Ist nur ein sehr enger Absorptionsstreifen vorhanden, so erstreckt sich die Gesamtabsorption, welche durch sein Vorhandensein hervorgerufen wird, auf die nächste Umgebung desselben. Es darf dann statt  $J(n)/\lambda \dots J(n_r)/\lambda_r$  gesetzt werden. Ferner ist (vgl. (24a)) angenähert

$$k = \frac{H}{2(1+x^2)\sqrt{A_r}}, \text{ wobei } x = \frac{(n-n_r)}{p_r}, \quad H = \frac{Q_r}{p_r}.$$

Nun ist  $n'-n_r < 0$ ,  $n''-n_r > 0$ ,  $p_r < 0$  und jedenfalls sehr klein gegen  $n'-n_r$ ,  $n''-n_r$ . Denn  $-(2p_r)$  ist die noch innerhalb des Absorptionsstreifens liegende Entfernung zwischen dem Minimum und Maximum des realen Brechungsindex. Dies benutzt und  $A_r$  (bei Gasen) = 1 gesetzt, wird

$$(29) \quad J = \frac{4\pi J(n_r)}{2\lambda_r} Q_r \int_{\frac{n'-n_r}{p_r}}^{\frac{n''-n_r}{p_r}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{4\pi^2 J(n_r)}{2\lambda_r} \cdot (-Q_r).$$

Die Größe  $J$  ist ein Maß der durch den Streifen bewirkten Gesamtabsorption, daher  $(-Q_r/\lambda_r)$  im direkten Phänomen ein Maß der Gesamtintensität der Spektrallinie (das Kirchhoff'sche Gesetz als geltend vorausgesetzt).

7. Eine Vorstellung über den Größenwert von  $Q_r$  in der Kettlerschen Formel (21)

$$N^2 = A' + \sum_{r=1}^{r=s} \frac{B_r}{\lambda_r^2 - \lambda^2}, \quad B_r = \frac{2Q_r}{n_r} \lambda_r^3$$

ergeben Messungen von Wood<sup>1)</sup> an äußerst dichtem, noch nicht leuchtenden Natriumdampf.<sup>1)</sup> Seine Messungen lassen sich darstellen durch

$$N^2 = 1 + \frac{m \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_r^2} = 1 + m + \frac{m \lambda_r^2}{\lambda^2 - \lambda_r^2}, \text{ wobei } m = 0,000055.$$

Hieraus folgt

$$2Q_r = -0,000055 q_r \text{ (statt } n_r \text{ einfacher } q_r \text{ gesetzt).}$$

1) Wood, Physik. Opt. p. 346.

Aus (18a) folgt, wenn  $P_r = 0$  gesetzt wird

$$(30) \quad (N - i k)^2 = A + \sum_{r=1}^s \frac{-2 Q_r q_r}{(n i - p_r)^2 + q_r^2}.$$

Der Zähler des Bruches in (30) stellt eine wichtige Dispersionskonstante vor. Ihr Wert beträgt für den dichten Natriumdampf von Wood (im Sekundenmaß ist  $q_r = 3,2 \cdot 10^{15}$ ) etwa

$$-2 Q_r q_r = 5,6 \cdot 10^{26}.$$

Für Natriumdampf von etwa der Dichte  $1,6/10^6$ , aber in heißer Gebläseflamme, ergibt sich nach Messungen von L. Geiger<sup>1)</sup>, die noch später benutzt werden, der sehr viel kleinere Wert

$$-2 Q_r q_r = 4,8 \cdot 10^{23}.$$

Die vom Einflusse der Spaltweite und Diffraktion befreite Dicke einer Linie bildet eine obere Grenze von  $-2 p_r$ . Schätzt man die beispielsweise direkt gesehene Dicke einer der  $D$ -Linien im Mittel auf  $0,4 \text{ Å.E.}$  (Geiger, l. c.), so wird  $p_r/q_r$  sicherlich bedeutend kleiner sein als  $3/10^5$ . Wir werden im folgenden  $p_r/q_r$  stets als verschwindend klein betrachten.

#### Mathematische Formulierung des Zerfalls einer Spektrallinie.

8. Ein magnetisiertes Gas verhält sich senkrecht zum Felde wie ein einachsiger Kristall mit der Richtung des Feldes als Symmetriearchse. Für den komplexen Brechungsindex sowohl der parallel zum Felde als auch der senkrecht gerichteten Schwingungen elektrischer Art haben wir Formeln vom Typus (17) zu erwarten. Der Einwirkung des Feldes wird eine Änderung der Zähler- und Nennerfunktion entsprechen. Nehmen wir im einfachsten Falle an, es hätten sich bloß die Konstanten des Nenners geändert, so wird (17) zu

$$(30a) \quad (N - i k)^2 = 1 + \frac{f(\nu)}{\varphi(\nu) + \gamma(\nu)},$$

Dabei sei  $\gamma(\nu)$  ein Polynom von  $\nu$  von *niedrigerem* Grade als  $\varphi(\nu)$ , mit *realen* Koeffizienten, die *paare* Funktionen der Feld-

---

1) L. Geiger, Ann. d. Phys. 23. p. 758. 1907; Nachtrag 24. p. 597.  
1907.

stärke sein werden, da der Transversaleffekt von der Feldrichtung nicht abhängen kann. Es seien

$$\nu_r = p_r + q_r i, \quad \nu'_r = p_r - q_r i, \quad r = 1, 2, \dots, s$$

die  $s$  konjugierten Wurzelpaare von  $\varphi(\nu) = 0$  und es werde gesetzt

$$(31) \quad \mu_r(\nu) = (\nu - \nu_r)(\nu - \nu'_r) = \nu^2 - 2p_r\nu + n_r^2 = n_r^2 - n^2 - 2ni p_r.$$

Es lässt sich dann schreiben:

$$(32) \quad \varphi(\nu) = \mu_1(\nu) \cdot \mu_2(\nu) \cdots \mu_s(\nu).$$

Die Funktion  $\varphi(\nu)$  ist eine paare Funktion von  $\nu$ , wenn die Größen  $p_r$  Null sind; sind dieselben gegen die  $q_r$  sehr klein, besteht  $\varphi(\nu)$  aus der Summe einer paaren und einer impaaren Funktion, wobei die Koeffizienten der letzteren gegen jene der ersteren sehr klein sein werden.

Besteht die Wirkung des Feldes in der Änderung der Koeffizienten des *paaren* Teiles, d. h. ist  $\gamma(\nu)$  in (30a) eine paare Funktion von  $\nu$ , so werden bis auf Größen höherer Ordnung nur die  $q_r$  geändert; es tritt also eine von der Feldrichtung unabhängige Verschiebung eines jeden Streifens ein. Ist dagegen  $\gamma(\nu)$  *impaar*, so bleibt jeder Streifen an seiner Stelle, nur sein  $p_r$ , d. h. seine Breite ändert sich.

9. Zerfall *eines* der Urstreifen (etwa des zu  $p_1 \pm q_1 i$  gehörigen) in  $r_1$  Komponenten tritt ein, wenn wir in (30a) statt  $\gamma(\nu)$  setzen  $\gamma_1(\nu) \mu_1(\nu)^{1-r_1}$ . Es wird dann

$$(33) \quad (N - ik)^2 = 1 + \frac{\gamma_1(\nu) \mu_1(\nu)^{r_1-1}}{\varphi(\nu) \mu_1(\nu)^{r_1-1} + \gamma_1(\nu)}.$$

Die Funktion  $\gamma_1(\nu)$  ist wieder ein  $\nu$ -Polynom mit vom Felde abhängigen und mit ihm verschwindenden realen Koeffizienten, jedoch von niederm Grade als  $\varphi(\nu) \mu_1(\nu)^{r_1-1}$ . Für jene Wurzeln des Nenners in (33), die dem Urstreifen 1 nahe liegen, hat man angenähert

$$\mu_1(\nu)^{r_1} + \frac{\gamma_1(\nu_1)}{\mu_2(\nu_1) \cdots \mu_s(\nu_1)} = 0.$$

Ist  $\nu = \nu_1 + \Delta \nu_1$  eine derselben, so ergibt sich mit Rücksicht auf die aus (31) folgende Relation

$$\mu_1(\nu_1 + \Delta \nu_1) = \Delta \nu_1 (\Delta \nu_1 + \nu_1 - \nu_1') = \Delta \nu_1 \cdot 2q_1 i \text{ (angenähert)}$$

die Formel

$$(34) \quad \Delta v_1 \cdot 2 q_1 i = - \sqrt{\frac{\gamma_1(v_1)}{(q_2^2 - q_1^2) \dots (q_s^2 - q_1^2)}}.$$

Bei sehr kleinen  $p_r$ -Werten gilt nämlich

$$(35) \quad \begin{cases} \mu_2(v_1) = (v_1 - v_2)(v_1 - v_2) \\ \quad = (p_1 - p_2 + i(q_1 - q_2))(p_1 - p_2 + i(q_1 + q_2)) = q_2^2 - q_1^2 \\ \mu_3(v_1) = q_3^2 - q_1^2, \dots \mu_s(v_1) = q_s^2 - q_1^2. \end{cases}$$

Aus (34) ist dann  $\Delta v_1 = \Delta p_1 + i \Delta q_1$  bestimmbar, wenn  $\gamma(v_1)$  gegeben ist.

Es wird ferner eine jede Spektrallinie in je  $r_1 r_2 \dots r_s$  Komponenten zerfällt werden, wenn wir setzen

$$(36) \quad (N - ik)^2 = 1 + \frac{f(\nu) \sigma(\nu)}{\varphi(\nu) \sigma(\nu) + \gamma(\nu)} = 1 + \frac{f(\nu)}{\varphi(\nu) + \frac{\gamma(\nu)}{\sigma(\nu)}},$$

wobei

$$(37) \quad \sigma(\nu) = \mu_1(\nu)^{r_1-1} \cdot \mu_2(\nu)^{r_2-1} \dots \mu_s(\nu)^{r_s-1}.$$

Formel (36) hat das Aussehen von (30a), nur ist in Gleichung (36) die vom Felde herrührende Zusatzfunktion  $\gamma(\nu)$  der Gleichung (30a) diesmal ersetzt durch eine rational gebrochene Funktion, die an den Orten, wo  $\mu_1, \dots, \mu_s$  gleich Null wird (d. h. an den Orten der Urstreifen), polar unendlich wird von den Graden  $r_1 - 1, \dots, r_s - 1$ . Da beispielsweise beim Transversaleffekt ähnliches von *beiden* Polarisationsarten gelten wird, kann die den letzteren entsprechende Differenz der Brechungsindizes, d. h. die Doppelbrechung des Gases, im erhöhtem Maße nur in der nächsten Nähe der Spektrallinien auftreten, was tatsächlich von Voigt nachgewiesen wurde. Die den Gleichungen (36), (37) zugrunde liegenden Annahmen haben daher im Vorhinein eine gewisse Berechtigung.

Die Formeln (36), (37) lassen sich noch verallgemeinern, wenn man statt der Zusatzfunktion  $\gamma(\nu)/\sigma(\nu)$  die allgemeinste Formel setzt, die ein polares Unendlichwerden an den Orten  $\mu_1 = 0 \dots \mu_s = 0$  zuläßt.

Die neue Zusatzfunktion ist  $K(\nu)/\sigma(\nu)$ , wobei

$$(37a) \quad K(\nu) = \sum_{\vartheta_1} \sum_{\vartheta_2} \dots \sum_{\vartheta_s} [\mu_1^{\vartheta_1} \mu_2^{\vartheta_2} \dots \mu_s^{\vartheta_s} \gamma_{\vartheta_1 \vartheta_2 \dots \vartheta_s}(\nu)].$$

Die ganzen Zahlen  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_s$  sollen den Bedingungen

$$\vartheta_1 \leqq r_1 - 1, \dots, \vartheta_s \leqq r_s - 1$$

genügen. Ferner soll der Grad der „Feldfunktionen“  $\gamma_{\vartheta_1 \vartheta_2 \dots \vartheta_k(\nu)}$  bezüglich des  $\nu$  nur so hoch gewählt werden, daß der Grad von  $K(\nu)$  kleiner bleibt als jener von  $\varphi(\nu) \sigma(\nu)$ . Aus der so modifizierten Formel (36)

$$(38) \quad (N - ik)^2 = 1 + \frac{f(\nu) \sigma(\nu)}{\varphi(\nu) \sigma(\nu) + K(\nu)}$$

ist zu ersehen, daß tatsächlich die Gesamtzahl der konjugierten Wurzelpaare *nicht größer* wird, als sie sein soll, nämlich

$$r_1 + r_2 + \dots + r_s$$

Auch die Formel (38) läßt sich verallgemeinern, wenn wir im *Zähler* rechter Hand statt des Produktes

$$\sigma(\nu) = \mu_1(\nu)^{r_1-1} \mu_2(\nu)^{r_2-1} \dots \mu_s(\nu)^{r_s-1}$$

setzen:

$$H_1(\nu) \cdot H_2(\nu) \dots H_s(\nu),$$

wobei

$$(39) \quad \begin{cases} H_1(\nu) = (\mu_1(\nu) - g_{11}) (\mu_1(\nu) - g_{12}) \dots (\mu_1(\nu) - g_{1, r_1-1}), \\ H_2(\nu) = (\mu_2(\nu) - g_{21}) (\mu_2(\nu) - g_{22}) \dots (\mu_2(\nu) - g_{2, r_2-1}) \text{ usw.} \end{cases}$$

Die Größen  $g_{ij}$  sollen einfachheitshalber nur vom Felde abhängende und mit ihm verschwindende *reale* Konstanten vorstellen.<sup>1)</sup> Der so verallgemeinerte Ansatz

$$(40) \quad (N - ik)^2 = 1 + \frac{f(\nu) H_1(\nu) \cdot H_2(\nu) \dots H_s(\nu)}{\varphi(\nu) \sigma(\nu) + K(\nu)}$$

genügt den folgenden Bedingungen.

1) Jeder Ausdruck für  $(N - ik)^2$  soll sich aus den Differentialgleichungen (9) ergeben, in welchen ebenen Wellen entsprechende Integrale eingesetzt wurden. Da die Konstanten der Differentialgleichungen real sind, können in der rational gebrochenen Funktion von  $\nu$ , durch welche  $(N - ik)^2$  darstellbar ist, wieder nur reale Koeffizienten vorkommen. Im besonderen muß dies auch von den Funktionen  $\gamma(\nu)$  gelten, welche infolge der Feldwirkung auftreten, ferner von den Größen  $g_{ij}$  usw. Diese letzteren dürfen auch die Form  $g_{ij}' + g_{ij}'' \cdot \nu$  annehmen, da sie neben den  $\mu_i(\nu)$  stehen, die ein Quadrat von  $\nu$  enthalten.

Der Potenzgrad des Zählers nach  $\nu$  bleibt dann ungeändert und es wird für unendlich kurze Wellen ( $\nu = \infty$ ) die Größe  $(N - ik)^2$  gleichfalls zu 1 konvergieren. Eine weitere Verallgemeinerung ist die, daß man  $f(\nu)$  durch  $f(\nu) + f_1(\nu)$  ersetzt, wobei  $f_1(\nu)$  eine ganze Funktion von  $\nu$  vorstellt, höchstens vom selben Grade wie  $f(\nu)$ , jedoch mit realen Koeffizienten, die mit dem Felde verschwinden. Wir werden im Texte  $f_1(\nu)$  einfacheitshalber weglassen und erst an passender Stelle die Bedeutung des  $f_1(\nu)$  erörtern.

$\alpha)$  Bei Abwesenheit des Feldes reduziert sich  $H_1(\nu) \dots H_s(\nu)$  auf  $\sigma(\nu)$ ,  $K(\nu)$  verschwindet und man gelangt zu (17), d. h. zum System der Urstreifen zurück.

$\beta)$  Da der Grad von  $K(\nu)$  niedriger ist als jener von  $\gamma(\nu) \sigma(\nu)$ , und gleiches von  $f(\nu)$  gegenüber  $\varphi(\nu)$  gilt, wird  $\lim \nu = \infty$  die Größe  $(N - ik)^2$  zu 1 konvergieren auch bei Anwesenheit des Feldes.

$\gamma)$  In der nächsten Umgebung eines etwa zu  $\nu_1 = p_1 \pm q_1 i$  gehörigen Urstreifens wird der Modul von  $\mu_1(\nu) = (\nu - \nu_1)(\nu - \nu_1')$  sehr klein, dagegen jener von  $\mu_2(\nu) \dots \mu_s(\nu)$ , wofür wir auch  $\mu_2(\nu_1) \dots \mu_s(\nu_1)$  setzen dürfen, endlich sein.

Weil die in (39) vorkommenden, vom Felde abhängigen Konstanten  $g_{ij}$  jedenfalls sehr klein sein werden, da ja das Feld nur eine Störung der Dispersionsverhältnisse hervorruft, wird sich

$$H_2(\nu_1) \dots H_s(\nu_1) \text{ auf } \mu_2(\nu_1)^{r_2-1} \dots \mu_s(\nu_1)^{r_s-1}$$

reduzieren. Der Ausdruck

$$\varphi(\nu) \sigma(\nu) = \mu_1(\nu)^{r_1} \cdot \mu_2(\nu)^{r_2} \dots \mu_s(\nu)^{r_s}$$

wird zu

$$\mu_1(\nu)^{r_1} \cdot \mu_2(\nu_1)^{r_2} \dots \mu_s(\nu_1)^{r_s}.$$

Der Ausdruck  $K(\nu)$  (37a), in welchem  $\mu_1(\nu)$ ,  $\mu_2(\nu) \dots$ ,  $\mu_s(\nu)$  und die  $\gamma(\nu)$  vorkommen, lässt sich nach Potenzen von  $\mu_1(\nu)$  ordnen, deren höchste die  $(r_1 - 1)^{\text{te}}$  ist. Statt der  $\mu_2(\nu) \dots \mu_s(\nu)$  können die konstanten Werte  $\mu_2(\nu_1) \dots \mu_s(\nu_1)$  eingesetzt werden. Zufolge (35) sind sie real.

Auch die Feldfunktionen  $\gamma(\nu)$  oder  $\gamma(\nu_1)$  werden zu realen Konstanten, falls sie, was wir voraussetzen wollen, paare Funktionen von  $\nu$  sind. Der Nenner in (40) nimmt dann die Form an

$$\mu_1(\nu)^{r_1} \cdot \mu_2(\nu_1)^{r_2} \dots \mu_s(\nu_1)^{r_s} + \mu_1(\nu)^{r_1-1} \cdot B_1 + \mu_1(\nu)^{r_1-2} \cdot B_2 \dots,$$

wobei  $B_1 B_2 \dots$  wesentlich real wird. Wir heben noch den Faktor

$$\varepsilon = \mu_2(\nu_1)^{r_2} \dots \mu_s(\nu_1)^{r_s}$$

heraus und bekommen für den Nenner

$$\varepsilon (\mu_1(\nu)^{r_1} + b_1 \mu_1(\nu)^{r_1-1} + \dots).$$

Wegen

$$\varepsilon = H_2(\nu_1) \dots H_s(\nu_1) \cdot \mu_2(\nu_1) \dots \mu_s(\nu_1)$$

folgt aus (40), worin wir auch  $f(\nu_1)$  statt  $f(\nu)$  setzen dürfen,

$$(N - ik)^2 = 1 + \frac{f(\nu_1)}{\mu_2(\nu_1) \dots \mu_s(\nu_1)} \cdot \frac{H_1(\nu)}{\mu_1(\nu)^{r_1} + b_1 \mu_1(\nu)^{r_1-1} + \dots}$$

Weil  $\nu = \nu_1$  die Funktion  $\mu_1(\nu)$  Null macht, gilt

$$\lim_{\nu \rightarrow \nu_1} \left| \frac{\mu_1(\nu) \mu_2(\nu) \dots \mu_s(\nu)}{\mu_1(\nu)} \right| = \lim_{\nu \rightarrow \nu_1} \left| \frac{\varphi(\nu)}{\mu_1(\nu)} \right| = \left| \frac{\varphi'(\nu)}{\frac{d \mu_1}{d \nu}} \right| = \frac{\varphi'(\nu_1)}{2(\nu_1 - p_1)} = \frac{\varphi'(\nu_1)}{2q_1 i} \quad (\text{vgl. (31)}),$$

daher

$$\frac{f(\nu_1)}{\mu_2(\nu_1) \dots \mu_s(\nu_1)} = \frac{f(\nu_1)}{\varphi'(\nu_1)} \cdot 2q_1 i = (P_1 + Q_1 i) \cdot 2q_1 i = -2Q_1 q_1$$

(Gleichung (18), wegen  $P_1 = 0$  vgl. p. 483).

Wir bekommen schließlich in  $H_1(\nu)$ , Gleichung (39), die Doppelindizes bei den  $g$  weglassend und  $r_1$  statt  $r$  schreibend,

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} (N - ik)^2 = 1 - 2Q_1 q_1 \cdot \frac{(\mu_1 - g_1)(\mu_1 - g_2) \dots (\mu_1 - g_{r-1})}{\mu_1^r + b_1 \mu_1^{r-1} + \dots b_r} \\ \qquad \qquad \qquad = 1 - 2Q_1 q_1 \cdot \frac{(\mu_1 - g_1) \dots (\mu_1 - g_{r-1})}{(\mu_1 - h_1) \dots (\mu_1 - h_r)}. \end{array} \right.$$

Das hier benutzte angenähert richtige Rechenverfahren drückt die gegenseitige Unabhängigkeit der Spektralstreifen im Zeeman-Effekte aus.

Die Koeffizienten  $b_1 \dots b_r$  in (41) sind wesentlich real; die Gleichung

$$\mu_1^r + b_1 \mu_1^{r-1} + \dots + b_r = 0$$

hat daher reale bzw. komplexe konjugierte Wurzeln. In der in diesem Aufsatze befolgten Tendenz, wirklichen Fällen durch passende Annahmen nahezukommen, nehmen wir an, sie seien, gleichwie die  $g$ , insgesamt real, eine dieser Wurzeln  $h_j$ .

Es gilt dann laut (31)

$$\mu_1 = \nu^2 - 2\nu p_1 + n_1^2 = h_j,$$

oder

$$\nu = p_1 \pm i\sqrt{n_1^2 - h_j} = p_1 \pm i\sqrt{q_1^2 - h_j} \quad (\text{angenähert}).$$

Mit verschwindendem Felde verschwinden auch die  $b_1 \dots b_r$  in (41); nehmen wir sie überhaupt als klein an, so werden auch alle  $h_j$

gegenüber  $q_1$  sehr kleine Werte besitzen und es wird angenähert

$$(41a) \quad v = p_1 \pm i q_1 \mp i \frac{h_j}{2 q_1} \quad \text{oder} \quad \Delta p_1 = 0, \quad \Delta q_1 = -\frac{h_j}{2 q_1}.$$

Es folgt hieraus, daß sich infolge des Feldes die Größe  $p_1$  gar nicht, dagegen das wesentlich positive  $q_1$ , die  $2\pi$  fache Schwingungszahl, um  $-h_j/2 q_1$  geändert hat. Formel (41) gestattet folgende Interpretation.

10. Nehmen wir an, die Kundtsche Regel bleibe auch für die Zeemanstreifen ein und derselben Polarisationsart richtig. Dies ergibt folgendes: Bewegen wir uns von der roten Seite aus zum ersten Zeemannstreifen, so wird knapp vor ihm  $N$  einen Maximumwert, an der Stelle der stärksten Absorption den Wert *Eins* erreichen und sodann zu dem *unterhalb* 1 gelegenen Minimumwert herabsinken; es muß daher, weil  $N$  knapp vor dem *nächsten* Zeemanstreifen wieder stark in die Höhe geht, dasselbe irgendwo zwischen den zwei Streifen den Wert 1 nochmals erreichen.

Wenn die Streifen, entsprechend einem sehr kleinen  $p_1/q_1$  sehr fein sind gegenüber ihrer Distanz, wird an der eben erwähnten Stelle  $N=1$  auch  $k$  zu Null werden.

Dies ergibt auch die Formel (41); an Stellen, wo  $\mu_1$  die Werte  $g_1, g_2 \dots$  annimmt, oder korrekter gesprochen, für jene  $n$ , für welche der reale Teil von  $\mu_1 - g_j$  verschwindet, wird der Zählermodul in (41) unendlich klein von der Ordnung  $p_1/q_1$ ,  $N$  nahezu gleich 1 und  $k=0$ . Liegen die Zeemanstreifen an den Orten

$$\mu_1 = h_1, \quad h_2 \dots h_r,$$

so liegen die zu ( $N=1, k=0$ ) gehörigen Werte des  $\mu_1$ , nämlich  $g_1 \dots g_{r-1}$  zwischen den  $h$ -Werten. Denkt man sich die  $h$  nach der algebraischen Größe geordnet, so entsteht die Reihe der Ungleichungen

$$(42) \quad h_1 > g_1 > h_2 > g_2 > h_3 > \dots > g_{r-1} > h_r,$$

welche besagt, daß unter  $g_1$  jener  $\mu_1$ -Wert zu verstehen ist, welcher  $< h_1$ , aber  $> h_r$  ist usw.

Der Bruch in (41) kann wieder in Teilbrüche zerlegt werden. Es handle sich beispielsweise um den zur Wurzel  $h_1$  gehörigen und sei  $\bar{\nu}_1$  diejenige der zwei konjugierten Wurzeln von

$$\mu_1 = (v - \nu_1)(v - \nu_1') = v^2 - 2p_1 v + n_1^2 = h_1,$$

welche bei  $\sqrt{-1}$  einen positiven Faktor hat, und sei  $v - \bar{v}_1$  der Nenner des Teilbruches. Sein Zähler ist dann nach bekannten Regeln

$$(43) \quad -2 q_1 Q_1 \frac{(h_1 - g_1)(h_1 - g_2) \dots (h_1 - g_{r-1})}{\left[ \psi'(\mu_1) \frac{d \mu_1}{d v} \right]_{v=\bar{v}_1}},$$

wobei

$$\psi(\mu_1) = (\mu_1 - h_1)(\mu_1 - h_2) \dots (\mu_1 - h_r)$$

gesetzt ist. Hieraus folgt

$$\left| \begin{array}{l} \psi'(\mu_1) = (h_1 - h_2)(h_1 - h_3) \dots (h_1 - h_r), \\ v = \bar{v}_1 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{d \mu_1}{d v} = 2(\bar{v}_1 - p_1) = 2 \bar{q}_1 i, \\ v = \bar{v}_1 \end{array} \right.$$

wegen  $\bar{v}_1 = p_1 + \bar{q}_1 i$ .

Weil nun  $q_1$  (die 2  $\pi$ -Schwingungszahl des Urstreifens) von jener  $\bar{q}_1$ , welche zur *ersten* Zeemankomponente gehört, unendlich wenig abweicht, so darf für den Zähler (43) des zu gehörigen Teilbruches gesetzt werden

$$Q_1 i \cdot \vartheta_1,$$

wobei

$$(44) \quad \vartheta_1 = \frac{(h_1 - g_1)(h_1 - g_2) \dots (h_1 - g_{r-1})}{(h_1 - h_2)(h_1 - h_3) \dots (h_1 - h_r)}.$$

In ähnlicher Weise sind die Zähler der zu  $h_2 \dots h_r$  gehörenden Teilbrüche

$$Q_1 i \cdot \vartheta_2, \quad Q_1 i \cdot \vartheta_3, \dots \quad Q_1 i \cdot \vartheta_r,$$

wobei

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vartheta_2 = \frac{(h_2 - g_1)(h_2 - g_3) \dots (h_2 - g_{r-1})}{(h_2 - h_1)(h_2 - h_3) \dots (h_2 - h_r)}, \dots \\ \vartheta_r = \frac{(h_r - g_1)(h_r - g_2) \dots (h_r - g_{r-1})}{(h_r - h_1)(h_r - h_2) \dots (h_r - h_{r-1})}. \end{array} \right.$$

Der Ungleichung (42) zufolge sind alle  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_r$  wesentlich positiv.

Die in Gleichung (29) vorkommende Größe  $Q_r$ , multipliziert mit  $\sqrt{-1}$ , bildete den Zähler des Teilbruches mit dem Nenner  $v - p_r - q_r i$ , ( $q_r > 0$ ), der zugeordnet ist einem Urstreifen des *unmagnetisierten* Gases. Die Größe  $(-Q_r/\lambda_r)$  ist laut (29) ein Maß der Gesamtintensität der Spektrallinie im direkten Phänomen. Dem  $Q_r$  entspricht in unserem Falle  $Q_1$ .

Da nun die Wellenlängen der Zeemankomponenten sich untereinander nur minimal unterscheiden, so werden laut (29) die Intensitäten derselben, bezogen auf jene des Urstreichens, durch  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_r$  gegeben sein.

Es läßt sich leicht zeigen, daß  $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots + \vartheta_r = 1$  sein muß, daß also die Summe der Intensitäten der Zeemanstreifen jener des unmagnetisierten Streifens gleichkommt.<sup>1)</sup>

11. Behufs Nachweises der letzterwähnten Relation betrachten wir die Größe

$$(46) \left\{ S_f = \frac{h_1^f}{(h_1 - h_2)(h_1 - h_3) \dots (h_1 - h_r)} + \frac{h_2^f}{(h_2 - h_1)(h_2 - h_3) \dots (h_2 - h_r)} + \dots + \frac{h_r^f}{(h_r - h_1) \dots (h_r - h_{r-1})} \right.$$

wobei  $f$  eine ganze Zahl ist.

Wir bringen  $S_f$  auf den gemeinschaftlichen Nenner

$$H = (h_1 - h_2) \dots (h_1 - h_r) \times (h_2 - h_3) \dots (h_2 - h_r) \times \dots \times (h_{r-1} - h_r).$$

Die Summanden des Zählers bestehen aus Faktoren. Vom dritten angefangen, besitzen alle folgenden den Faktor  $(h_1 - h_2)$ . Aber auch die zwei ersten zusammengenommen müssen ihn

1) Dabei ist wesentlich vorausgesetzt, daß das in (40) vorkommende  $f(\nu)$  identisch ist mit dem gleich bezeichneten Symbol in (17), der Gleichung für das unmagnetisierte Gas. Wird zufolge der Bemerkung in der Fußnote auf p. 490 statt  $f(\nu) \dots f(\nu) + f_1(\nu)$  geschrieben, so hat auch  $Q_1$  in (41) eine andere Bedeutung. Die Größen  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots$  sind nach wie vor ein Maß für die Intensitäten der einzelnen Linien *untereinander*, aber nicht mehr in bezug auf jene der *unmagnetisierten* Urstreichens, welche durch  $Q_1$  nur dann zu messen ist, falls das Glied  $f_1(\nu)$  weggelassen werden kann. Die Relation  $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots + \vartheta_r = 1$  besagt dann, daß die  $\vartheta_1 \dots \vartheta_r$  Bruchteile der Intensität eines *eingliedrigen* Urstreichens an selber Stelle bedeuten, die gleich ist der Gesamtintensität aller Komponenten. Die Annahme, es sei  $f_1(\nu)$  von Null verschieden, läßt sich noch anders aussprechen. Die Größen  $g, h$  in (41) sind Größen von der Ordnung der Streifendistanzen.

In weiter Entfernung vom Urstreichens ist  $\mu_1$  als groß gegen  $g, h$  anzusehen und an diesen Stellen wird, etwa nur einen Urstreichens vorausgesetzt,  $(N - i k)^2$  zu

$$1 - \frac{2 Q_1 q_1}{\mu_1}$$

konvergieren, also nicht mehr zu dem Werte, der an dieser Stelle bestände, wenn das Feld nicht vorhanden wäre.

besitzen, weil für  $h_1 = h_2$ , ihre Summe Null ist. Der Zähler hat also den Faktor  $(h_1 - h_2)$  und mit gleichem Rechte jeden der in  $\Pi$  vorkommenden Faktoren, falls  $f \geq r - 1$  ist. Durch Kürzung von  $\Pi$  ergibt sich für  $S_f$  eine symmetrische homogene Funktion der  $h_1, h_2 \dots h_r$  vom Grade  $f - (r - 1)$ . Ist speziell  $f = r - 1$ , so ist es eine Konstante und zwar = 1, wie man sich überzeugt, wenn in (46) alle  $h$  bis auf  $h_1$  der Null gleichgesetzt werden.

Für  $f < r - 1$  ist  $S_f$  eine homogene (gebrochene) Funktion der  $h$  vom negativen Grade (laut (46)), muß daher, wie schon Euler in anderer Weise gezeigt hat, identisch verschwinden. Denn im Gegenfalle müßte der Zähler die Größe  $\Pi$  als Faktor besitzen und  $S_f$  zu einer homogenen Funktion vom positiven Grade werden. Durch solche Funktionen  $S_f$  läßt sich nun  $\vartheta_1 + \vartheta_2 \dots + \vartheta_r$  darstellen. Beispielsweise ist

$$\vartheta_1 = \frac{h_1^{r-1} - h_1^{r-2} \sum g_i + h_1^{r-3} \sum g_i g_j \dots}{(h_1 - h_2)(h_1 - h_3) \dots (h_1 - h_r)},$$

$$\vartheta_2 = \frac{h_2^{r-1} - h_2^{r-2} \sum g_i + h_2^{r-3} \sum g_i g_j \dots}{(h_2 - h_1)(h_2 - h_3) \dots (h_2 - h_r)} \text{ usw.}$$

Die Summierung ergibt  $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots + \vartheta_r = 1$ .

Wir sehen also, daß die Annahme, es seien alle Wurzeln der nullgesetzten Zähler und Nenner in (41) reell, zu reellen positiven Intensitäten der Zeemankomponenten führt; ihre Gesamtintensität ist gleich jener des Urstreichens, aus dem sie entstanden sind. Wir fügen eine wichtige Bemerkung hinzu. Symmetrie der Lage der Zeemankomponenten um den Urstreifen herum verlangt, daß einer Wurzel  $h_j$  eine andere  $-h_j$  zugeordnet ist. Es kann auch  $h_j$  Null sein. Damit ist aber nicht gesagt, daß auch die Intensitäten symmetrisch seien. Dies tritt nur dann ein, wenn auch je zwei  $g$ -Werte in (41) entgegengesetzte Werte annehmen.

**12.** Bei vorgeschriebener Lage der Zeemanstreifen sind die Nennerwurzeln in (41) gegeben. Sind die relativen Intensitäten  $\vartheta_1 \dots \vartheta_r$  bekannt, so sind laut (44), (45) die numerischen Werte des Zählerpolynoms in (41) für  $\mu_1 = h_1, h_2 \dots$  gegeben, seine Koeffizienten bestimmbar. Daher wird Zähler und Nenner in (41) konstruierbar. Gleiche Überlegungen gelten

für jede Polarisationsart einer gegebenen Wellennormale. Das eigentlich Hypothetische bei der Herleitung von (41) ist (im  $p_1/q_1 = 0$ ) nur die Gültigkeitsannahme der Kundtschen Regel. Die von  $\nu^2$  oder auch von  $n^2 - n_1^2$  abhängige rational gebrochene Funktion  $(N - ik)^2 - 1$  hat dann zwischen je zwei Streifen und bei  $n^2 = \infty$  Nullstellen und an den Streifenorten Unendlichkeitsstellen, ist also in der angegebenen Weise konstruierbar.

Man kann zwar Gleichung (41) formell noch verallgemeinern, wenn man statt der Zähler- und Nennerwurzeln  $g_j, h_j$  die Ausdrücke  $g_j' + \nu g_j'', h_j' + h_j'' \nu$  schreibt, aber für verschwindende  $p_1$  kommt man immer zu (41) zurück. Die  $g_j' g_j'' h_j' h_j''$  sind im allgemeinen komplex, müssen aber der Bedingung Genüge leisten, daß Zähler und Nenner zu ganzen Funktionen von  $\nu$  mit *realen* Koeffizienten werden. Die Orte der Zeemanstreifen sind dann durch

$$\mu_1 = h_j' + h_j'' \nu \quad \text{oder} \quad n_1^2 - n^2 - 2 p_1 n i = h_j' + h_j'' n i$$

gegeben, jene der ( $N = 1, k = 0$ ) Stellen durch

$$n_1^2 - n^2 - 2 p_1 n i = g_j' + g_j'' n i.$$

Da das Magnetfeld nur eine Störung der Absorptions- und Dispersionsverhältnisse einführt, dürfen statt  $h_j'' n i, g_j'' n i, p_1 n i$  die Werte  $h_j'' n_1 i, g_j'' n_1 i, p_1 n_1 i$  eingeführt werden. Dadurch gelangt man zu (41) zurück. Die Größen  $h_j' + h_j'' n_1 i$  müssen dann selbstverständlich entweder komplex konjugierte Paare bilden oder es müssen die  $h_j''$  Null sein. Gleiches gilt von den  $g_j$ .

Ein spezieller Fall, welcher mit Voigts Lösung komplizierter Zeemanphänomene<sup>1)</sup> in Zusammenhang steht, möge noch erwähnt werden, nämlich jener  $h_j' = 0$  für alle  $j$ . Diesfalls müssen die  $h_j''$  komplex konjugiert sein, da der Nenner in (41) sich auf ein Polynom von  $\mu_1/\nu$  zurückführen läßt. Wählen wir dieselben konjugiert imaginär bzw. Null, d. h.  $h_j'' = H_j i$  bzw.  $-H_j i$ , so liegen die Zeemanstreifen an den Orten

$$n_1^2 - n^2 - 2 p_1 n i = \pm H_j n.$$

1) W. Voigt, Magnetoptik p. 186 ff.

Für die  $N_1 = 1$ ,  $k = 0$ -Stellen gilt ähnlich:

$$n_1^2 - n^2 - 2 p_1 n i = \pm G_j n,$$

falls auch  $g'_j = 0$  angenommen wird und die  $g''_j$  konjugiert imaginär sind.

Damit ist bei verschwindend kleinen  $p_1/q_1$  Symmetrie der Lagen und der Intensitäten in bezug auf den Urstreifen ausgesprochen. (Die  $p$ -Streifen bei Voigt.)

Da statt  $\pm H_j n$ ,  $\pm G_j n$  auch  $\pm H_j n_1$ ,  $\pm G_j n_1$  gesetzt werden darf, sind diese Formeln als spezieller Fall in (41) enthalten.

Zu der Formel (41), die sich in der Gestalt

$$\Psi(v)(N - ik)^2 = \Phi(v)$$

darstellen lässt, wo  $\Psi(v)$ ,  $\Phi(v)$  ganze Funktionen von  $v$  mit reellen Koeffizienten vorstellen, lässt sich leicht die zugehörige Differentialgleichung angeben, wenn statt  $v^r \dots \partial^r / \partial t^r$  eingeführt wird. Ist  $u$  der Lichtvektor,  $z$  seine Fortpflanzungsrichtung, so lautet dieselbe

$$\Psi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Phi\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right).$$

Da aber alle diese Gleichungen sich einheitlich aus den Grundgleichungen (9) herleiten lassen müssen, so werden sich zwischen den  $(N - ik)^2$  des Transversaleffektes und des longitudinalen Beziehungen finden lassen. Desgleichen müssen sich auch Werte dieser Größe ergeben, falls das Licht das magnetisierte Medium schief zur Feldrichtung durchsetzt. Dies wird behandelt im folgenden Kapitel.

#### Folgerungen aus den Differentialgleichungen (9).

**13.** Die Gleichungen (9) gelten für jedes Koordinatensystem. Wir verlegen daher die  $z$ -Achse in die Wellennormale, die zugleich Extinktionsnormale sein soll. Der Transversalitätsbedingung (1) wird durch  $w = 0$  genügt, da nichts von  $x$ ,  $y$  abhängt. An Stelle des Laplaceschen Symbols  $\Delta$  tritt  $\partial^2 / \partial z^2$ ; ferner ist (vgl. Gleichung (7))

$$2 \Theta = C_{11} u^2 + 2 C_{12} uv + C_{22} v^2;$$

die in (9) vorkommende Größe

$$J = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Theta}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Theta}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Theta}{\partial w}$$

ist Null. Benutzen wir bequemlichkeitshalber die durch (3a) gegebene Definition von  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , wird

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = -\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \zeta = 0.$$

Wir rechnen wieder mit dem Fresnelschen Vektor und nehmen an, daß die Größe  $\Psi$ , welche die Fresnelsche Doppelbrechungstheorie in der in der Einleitung berührten Weise modifizieren würde, weggelassen werden könne. Die dritte Gleichung in (9) ist identisch erfüllt, die beiden ersten geben

$$(47) \quad \begin{cases} F(\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} (s_3 + C_{12}), \\ F(\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} (C_{12} - s_3). \end{cases}$$

Den Gleichungen (47) genügen, unter  $A$ ,  $B$  komplexe Amplituden verstanden, die Integrale

$$(48) \quad u = A e^{r \left( t - \frac{z}{\omega} \right)}, \quad v = B e^{r \left( t - \frac{z}{\omega} \right)}$$

$\omega$  = komplexe Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Aus (48), (47) folgt

$$(49) \quad \begin{cases} (F(\nu) \omega^2 - C_{11}) A = B (s_3 + C_{12}), \\ (F(\nu) \omega^2 - C_{22}) B = A (C_{12} - s_3), \end{cases}$$

$$(50) \quad (F(\nu) \omega^2 - C_{11}) (F(\nu) \omega^2 - C_{22}) + s_3^2 - C_{12}^2 = 0,$$

oder

$$(51) \quad \frac{1}{\omega^2} = \frac{F(\nu)}{\frac{C_{11} + C_{22}}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{C_{11} - C_{22}}{2} \right)^2 - s_3^2 + C_{12}^2}},$$

$$(52) \quad \frac{A^2}{B^2} + \frac{A}{B} \frac{C_{11} - C_{22}}{s_3 - C_{12}} + \frac{s_3 + C_{12}}{s_3 - C_{12}} = 0.$$

Die Größen  $F(\nu)$ ,  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{22}$  sind ganze Funktionen von  $\nu$  mit reellen Koeffizienten. Bei durchsichtigen Kristallen hängen sie nur von  $\nu^2 = -n^2$  ab und sind real. Die Größe  $s_3 = s \cos \varphi$  ist die Projektion eines in die Feldrichtung fallenden Vektors auf die Wellennormale, die  $z$ -Achse, und ist gleichfalls eine

ganze Funktion von  $\nu$  mit realen Koeffizienten, die ihr Zeichen mit der Feldrichtung wechseln. Die Gleichungen (51), (52) führen zur bekannten einfachen Theorie des *Faradayeffektes* in durchsichtigen Kristallen, wenn man annimmt, daß die Doppelbrechungsparameter  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{22}$  und  $F(\nu)$  durch das Feld nicht verändert werden. Bei Abwesenheit desselben ( $s_3 = 0$ ) existieren stabile zueinander senkrecht gerichtete lineare Schwingungen, deren Richtungen wir zur  $x$ ,  $y$ -Achse machen können, so daß  $C_{12} = 0$  wird. Laut (49) ist dann  $\omega_x^2 = C_{11}/F(\nu)$ ,  $\omega_y^2 = C_{22}/F(\nu)$ . Einer optischen Achse entspricht  $C_{11} = C_{22}$ . Sollen die zugehörigen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten real sein, muß laut (51)  $s_3 = s \cos \varphi$  rein imaginär werden. Wir setzen  $s = \sigma \cdot i$ . Aus (52) folgt  $A/B = \pm i$ , die Wellen sind also entgegengesetzt zirkular polarisiert. Man sieht aus (51), daß die zu einer beliebigen Wellennormale ( $z$ -Achse) gehörigen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten real bleiben. Für  $A/B$  ergibt sich aus (52) ein Ausdruck der Form

$$i(P \pm \sqrt{P^2 + 1}), \quad P = (C_{11} - C_{22})/2\sigma \cos \varphi;$$

die Wellen sind also elliptisch polarisiert mit entgegengesetztem Umlaufssinne, wobei die Ellipsenachsen in die oben genannten stabilen Schwingungsrichtungen fallen. Der obige Vektor  $s$  ist eine ganze Funktion von  $\nu$  mit realen Koeffizienten. Imaginärwerden desselben fordert  $s = \nu f(\nu^2)$ , daher wegen  $s = \sigma i$ ,  $\nu = n i$  auch  $\sigma = n f(-n^2)$ . Dies will sagen, daß in den Gleichungen (4) die bei  $s_1^{(n)}, s_2^{(n)}, s_3^{(n)}$  stehenden, durch Gleichung (3a) definierten Symbole  $\xi \eta \zeta$  nach  $t$  in ungerader Anzahl zu derivieren waren. Dieselbe Annahme  $s = \sigma i$  machen wir in der folgenden Theorie des Zeeman-Effektes.

**14.** Wir spezialisieren die Formeln (47) bis (52) für unsere Zwecke durch die Annahme, daß das Medium ursprünglich isotrop ist. Es wird dann bei eintretendem Felde die Richtung desselben, die  $z'$ -Achse, welche mit der Wellennormale der  $z$ -Achse den Winkel  $\varphi$  einschließt, Symmetrieachse der Doppelbrechung werden.

Die Achsen  $xx'zz'$  sollen in einer Ebene, der Meridianebene, enthalten sein. ( $z'$  nach oben,  $x'$  nach rechts,  $z$  dazwischen,  $y = y'$  vor die Papierebene.) Es gilt dann wegen

$$v = v', \quad w' = w \cos \varphi - u \sin \varphi, \quad u' = w \sin \varphi + u \cos \varphi$$

$$(52) \left\{ \begin{array}{l} 2\Theta = C_{11}'(u'^2 + v'^2) + C_{33}'w'^2 = C_{11}u^2 + 2C_{12}uv + C_{22}v^2, \\ C_{11} = C_{11}'\cos^2\varphi + C_{33}'\sin^2\varphi, \\ C_{22} = C_{11}', \quad C_{12} = 0. \end{array} \right.$$

Das in Gleichung (52) vorkommende  $s_3$  ist Projektion eines in die Feldrichtung  $z'$  fallenden Vektors auf die  $z$ -Achse. Wir setzen  $s_3 = s \cos \varphi$ . An Stelle von (51), (52) tritt dann

$$(51a) \frac{1}{\omega^2} = \frac{F(\nu)}{C_{11}' + \sin^2\varphi \cdot \frac{C_{33}' - C_{11}'}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{C_{33}' - C_{11}'}{2}\sin^2\varphi\right)^2 - s^2 \cdot \cos^2\varphi}},$$

$$(52a) \frac{A^2}{B^2} + \frac{A}{B} \frac{(C_{33}' - C_{11}')\sin^2\varphi}{s \cos \varphi} + 1 = 0.$$

Die  $F(\nu)$ ,  $C_{11}'$ ,  $C_{33}'$  sind ganze Funktionen von  $\nu$  mit reellen Koeffizienten. Besitzt, wie wir annehmen wollen, das nicht magnetisierte Gas nur einen einzigen Absorptionsstreifen an der Stelle  $\nu = \nu_1 = p_1 + q_1 i$ , so liegt es zufolge des früher Gesagten nahe, anzunehmen, daß die erwähnten Größen von  $\nu$  nur insofern abhängen, als sie abhängen von

$$\mu_1 = \nu^2 - 2p_1\nu + n_1^2 = n_1^2 - n^2 - 2p_1\nu.$$

Auch von  $s = \sigma i$  nehmen wir an, daß es die Form besitzt  $s = \sigma i = \nu \vartheta(\mu_1)$ . An und für sich ist  $s$  numerisch klein gegenüber  $C_{11}$  usw., es darf daher bei engen Absorptionsstreifen, denen ein sehr kleines  $p_1/q_1$  entspricht, statt  $\mu_1$  auch  $n_1^2 - n^2$  gesetzt werden, so daß  $\sigma = n \vartheta(\mu_1)$  reell wird. Da es sich überdies nur um die nächste Umgebung des Absorptionsstreifens handelt, wird man hierfür  $\sigma = n_1 \vartheta(\mu_1)$  setzen dürfen. Das heißt, wir betrachten  $\sigma$  als ganze Funktion von  $\mu_1$  mit reellen Koeffizienten.

Wir führen bequemlichkeitshalber eine geänderte Bezeichnungsweise ein. Statt der Größe  $C_{33}' - C_{11}'$ , welche ein Maß der durch den Magnetismus erzeugten Doppelbrechung bildet, setzen wir  $\gamma$ , schreiben ferner

$$C_{11}' = \alpha \quad \text{und} \quad F(\nu) = \alpha + f(\nu) = \alpha + f.$$

$\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $f$  sind Polynome von  $\mu_1$  mit reellen Koeffizienten.

An Stelle der nach  $A/B$  aufgelösten Gleichung (52a) und (51a) tritt

$$(53) \quad \frac{A}{B} = i(\beta \pm \sqrt{1 + \beta^2}), \quad \beta = \frac{\gamma}{2\sigma} \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi},$$

$$(54) \quad \frac{1}{\omega^2} = \frac{f + \alpha}{\alpha + \frac{\gamma}{2} \sin^2 \varphi \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2} \sin^2 \varphi\right)^2 + \sigma^2 \cos^2 \varphi}}.$$

In der Feldrichtung ( $\varphi = 0$ ) pflanzen sich wegen  $A/B = \pm i$  zwei entgegengesetzt zirkulare Wellen fort. Ihr Brechungsindex ist, falls wir die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum Eins setzen,

$$(N - ik)_a^2 = \frac{f + \alpha}{\alpha \pm \sigma} = 1 + \frac{f \mp \sigma}{\alpha \pm \sigma},$$

oder ausgeschrieben

$$(55) \quad (N - ik)_{(a-)}^2 = 1 + \frac{f - \sigma}{\alpha + \sigma}, \quad \frac{A}{B} = i,$$

$$(56) \quad (N - ik)_{(a+)}^2 = 1 + \frac{f + \sigma}{\alpha - \sigma}, \quad \frac{A}{B} = -i.$$

Zu  $\varphi = 90^\circ$  gehört

$$(N - ik)^2 = \frac{f + \alpha}{\alpha + \frac{\gamma}{2} \pm \frac{\gamma}{2}}.$$

Aus (47) folgt spezieller, wenn  $\varphi = 90^\circ$ , d. h.  $s_3 = 0$  gesetzt und die Relation (52') berücksichtigt wird,

$$F(v) \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = C_{33}' \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad F(v) \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} = C_{11}' \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}.$$

Der Vektor  $v$  steht senkrecht zum Felde ( $s$ ),  $u$  ist demselben parallel ( $p$ ), da bei  $\varphi = 90^\circ$  die  $x$ -Achse in die  $-z'$ -Achse fällt. Nach Einführung der Werte für  $C_{33}', C_{11}'$  haben wir

$$(57) \quad (N - ik)_s^2 = \frac{f + \alpha}{\alpha} = 1 + \frac{f}{\alpha},$$

$$(58) \quad (N - ik)_p^2 = \frac{f + \alpha}{\alpha + \gamma} = 1 + \frac{f - \gamma}{\alpha + \gamma}.$$

Für unendlich kurze Wellenlängen,  $v = \infty$ ,  $\mu_1 = -\infty$  haben (54), (55), (56), (57), (58) insgesamt zu 1 zu konvergieren. Den Faktor bei der höchsten Potenz  $\mu_1^r$  in  $\alpha$  dürfen wir = 1 setzen. Aus (57) folgt dann, daß  $f$  ein Polynom von niederm Grade sein muß als  $\alpha$ . Infolgedessen muß dies auch von  $\sigma$  und  $\gamma$  gelten. Es gibt daher entsprechend dem Potenzgrad der Nenner in (55), (56), (57), (58) für  $\varphi = 0$   $r$  rechts und  $r$  links zirkulare Streifen im Axialeffekt, ferner  $r$   $p$ -Streifen und eben-

soviel  $s$ -Streifen im Transversaleffekt. Die Nennerwurzeln für beliebiges  $\varphi$  (schiefer Strahl) sind gegeben (vgl. (54)) durch

$$\left(\alpha + \frac{\gamma}{2} \sin^2 \varphi\right)^2 - \left(\frac{\gamma}{2} \sin^2 \varphi\right)^2 - \sigma^2 \cos^2 \varphi = 0$$

oder

$$(59) \quad \alpha^2 + \alpha \gamma \sin^2 \varphi - \sigma^2 \cos^2 \varphi = 0.$$

Einem schießen Strahl entsprechen daher wieder 2  $r$ -Streifen.

Die zum Transversaleffekt gehörigen Funktionen  $f$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$  haben reelle Koeffizienten, die paare Funktionen der Feldstärke sind, jene in  $\sigma$  sind unpaare Funktionen derselben. Es wird daher laut (55), (56) beim Wechsel der Feldrichtung in die entgegengesetzte der rechtszirkulären Streifen in den linkszirkulären übergehen und umgekehrt. Ist also  $h_j' - h_j''$  eine Wurzel von  $\alpha - \sigma = 0$ , so gehört zu derselben die Wurzel  $h_j' + h_j''$  von  $\alpha + \sigma = 0$ , wobei  $h_j'$  eine paare und  $h_j''$  eine unpaare Funktion der Feldstärke bedeutet. Ist die Gesamtheit der axialen ( $a$ ) Streifen symmetrisch um den Urstreißen verteilt, d. h.  $h_j' = 0$ , wird einem Streifen links vom Urstreißen ein äquidistanter entgegengesetz zirkulärer Streifen rechts von demselben entsprechen.

Die Funktionen  $\gamma$ ,  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $f$  werden  $\lim p_1/q_1 = 0$  reell, weil es  $\mu_1 = n_1^2 - n^2 - 2 p_1 n i$  wird, es wird daher auch  $\beta$  in (53) reell. Die „schießen“ Streifen sind also entgegengesetzt elliptisch polarisiert mit Achsen, die in die Meridianebeine fallen bzw. zu ihr senkrecht stehen. Weil die im Nenner der Gleichung (54) unter dem Wurzelzeichen stehende Größe für kein  $\varphi$  Null wird, bleiben beide Brechungsindizes getrennt voneinander, d. h. die Brechungsindizes der rechts (links) zirkulären Wellen ( $\varphi = 0$ ) derselben Schwingungsdauer gehen stetig über in ihre  $s$ ,  $p$ -Werte bei  $\varphi = 90^\circ$ .

Bei fehlendem Felde reduzieren sich, wie gesagt, alle Brechungsindizes notwendigerweise auf

$$(58a) \quad (N - i k)^2 = 1 + \frac{K}{\mu_1},$$

wobei (vgl. Gleichung (30))  $K = -2 Q_1 q_1$  die charakteristische Dispersionskonstante des Urstreißen vorstellt. Weil  $\gamma$ , das Maß der Doppelbrechung, und ebenso  $\sigma$ , die Ursache der

Elliptizität der Wellen, mit dem Felde verschwinden, reduzieren sich (55), (56), (57), (58) auf

$$(N - ik)^2 = 1 + \frac{f}{\alpha},$$

wobei  $f$  und  $\alpha$  die mit dem Felde nicht verschwindenden Anteile von  $f\alpha$  bedeuten.

Um auf (58a) zu kommen, setzen wir

$$\alpha = \mu_1^r, \quad f = K\mu_1^{r-1}, \quad \text{d. h.}$$

$$(58b) \quad \alpha = \mu_1^r + A_1\mu_1^{r-1} + \dots, \quad f = K\mu_1^{r-1} + F_1\mu_1^{r-2} + \dots,$$

wobei die  $A_j, \dots, F_j$  mit dem Felde zu verschwinden haben.

Für jeden der Brechungsindizes gelten Formeln vom Typus (41). An Stellen  $n$ , wo  $n_1 - n$  gegen die Streifendistanz, d. h. wo  $\mu_1$  gegen die  $g, h$  in (41) sehr groß wird, wird auch bei Anwesenheit des Feldes laut (41)  $(N - ik)^2$  zu (58a) konvergieren, das ist der Einfluß des Feldes verschwinden. Aus (55), (56), (58) folgt dann, daß  $\sigma, \gamma$  von niederm Grade sein muß als  $f$ , also höchstens vom Grade  $r - 2$ .

Dies gilt selbstverständlich nicht mehr, wenn für große  $\mu_1$  der Einfluß des Feldes nicht schwindet, also  $-2Q_1q_1$  in (41) nicht identisch ist mit dem zum Urstreifen gehörigen Werte des unmagnetisierten Gases (vgl. Fußnote p. 495).

Wir bemerken schon jetzt, daß die Gesamtzahl der  $a$ - und der  $s, p$ -Streifen dann und nur dann gleich ist, wenn die Zähler und Nenner in den in (55), (56), (57), (58) vorkommenden Brüchen *kein* Polynom von  $\mu_1$  als gemeinschaftlichen Teiler besitzen.

**15.** Erfahrungsgemäß ist die Gesamtzahl der axialen Komponenten stets kleiner als die Summe der  $p$ - und  $s$ -Streifen, in der Regel um  $p$ , da die  $a$ -Streifen mit den  $s$ -Streifen an derselben Stelle gelegen zu sein scheinen. (Man vgl. die instruktive Abbildung 57 auf p. 672 in Kaysers Hdb. d. Spektroskopie 2.)

Hieraus ist zu schließen, daß in den Formeln (55), (56)

$$(60) \quad \begin{cases} (N - ik)_{a-}^2 = 1 + \frac{f - \sigma}{\alpha + \sigma}, \\ (N - ik)_{a+}^2 = 1 + \frac{f + \sigma}{\alpha - \sigma} \end{cases}$$

sich im Zähler und Nenner gemeinschaftliche Polynome so kürzen müssen, daß Streifen nur an den durch die Wurzeln

einer neuen Gleichung  $\alpha' \pm \sigma' = 0$  erfahrungsmäßig vorgeschriebenen Orten vorkommen. Dabei ist  $\alpha' \pm \sigma'$  ein Polynom von niederm Grade als  $\alpha \pm \sigma$ . Die den wirklich vorhandenen  $\alpha$ -Streifen entsprechenden  $(N - i k)^2$  lassen sich dem früheren zufolge jedenfalls als gebrochene Funktionen von  $\mu_1$  so konstruieren, daß sowohl die Lagen als auch die Intensitäten derselben wiedergegeben werden. Wir setzen ganz allgemein

$$(61) \quad (N - i k)_{a+}^2 = 1 + \frac{\psi_1 + \psi_2}{\alpha' - \sigma'}; \quad (N - i k)_{a-}^2 = 1 + \frac{\psi_1 - \psi_2}{\alpha' + \sigma'}.$$

Die  $\alpha', \sigma', \psi_1, \psi_2$  sind wieder ganze Funktionen von  $\mu_1$  mit realen und, wie gesagt, bestimmbaren Koeffizienten.

Wählt man, was zulässig ist, als Koeffizienten der höchsten Potenz  $\mu_1^e$  in  $\alpha'$  die Einheit, so sind durch die Lage der rechts- bzw. linkszirkularen Komponenten die Wurzeln  $k$  von  $\alpha' - \sigma' = 0$  und  $\alpha' + \sigma' = 0$  gegeben, daher die Koeffizienten in  $\alpha' \pm \sigma'$  numerisch berechenbar und zwar für jede Feldstärke. Auf dem bereits angegebenen Wege lassen sich aus den Intensitäten der Linien auch die Koeffizienten in  $\psi_1 \pm \psi_2$  finden. Sollen sich mit verschwindendem Felde beide Ausdrücke (61) auf (58a) reduzieren, muß  $\psi_2, \sigma'$  mit dem Felde verschwinden,  $\psi_1$  den mit dem Felde nicht verschwindenden Summanden  $K \cdot \mu_1^{e-1}$  besitzen und  $\alpha'$  sich auf  $\mu_1^e$  reduzieren. Da bei entgegengesetzter Feldrichtung  $\sigma'$  sein Zeichen wechselt und die linkszirkulare Welle zur rechtszirkularen wird und umgekehrt, muß auch  $\psi_2$  sein Zeichen wechseln, dagegen  $\psi_1$  sein Zeichen beibehalten. Soll ferner Gleichung (61) weit vom Urstreifen gleichfalls zu (58a) konvergieren, kann  $\psi_2$  höchstens vom Grade  $\varrho - 2$  sein, da von  $\psi_1$  bei großen  $\mu_1$  nur das erste Glied  $\mu_1^{e-1}$  maßgebend ist.

Für ein axiales Dublett ( $\varrho = 1$ ) ist  $\psi_2$  gar nicht vorhanden, für ein Quadruplet  $\varrho = 2$  ist es von  $\mu_1$  unabhängig.

**16.** Die Drehung der Polarisationsebene an einer schon durchsichtigen Stelle des Spektrums, wo  $k^2$  gegen  $N^2$  vernachlässigt werden kann, ist cet. par. proportional mit  $N_+ - N_-$ , angennähert auch mit

$$(N - i k)_{(a+)}^2 - (N - i k)_{(a-)}^2,$$

d. h. proportional mit

$$\Delta = \frac{\psi_1 + \psi_2}{\alpha' - \sigma'} - \frac{\psi_1 - \psi_2}{\alpha' + \sigma'} = \frac{2(\psi_1 \sigma' + \psi_2 \alpha')}{\alpha'^2 - \sigma'^2}.$$

An solchen Stellen, wo  $\mu_1$  groß ist gegen seinen Wert an der Stelle der stärksten Absorptionen, darf gesetzt werden

$$\psi_1 = K \mu_1^{\varrho-1}, \quad \alpha' = \mu_1^\varrho, \quad \psi_2 = \vartheta \cdot \mu_1^{\varrho-2}, \quad \sigma' = \varepsilon \cdot \mu_1^{\varrho-1}.$$

Dadurch wird

$$(62) \quad A = \frac{2K\varepsilon + \vartheta}{\mu_1^2}.$$

Die (äußere) Drehung ist ( $\lim p_1/q_1 = 0$ ) symmetrisch verteilt um den Urstreifen und zu  $\mu_1^{-2}$  oder auch zu  $(n-n_1)^2$  verkehrt proportional. Für ein axiales Dublett ( $\varrho = 1$ ) ist  $\psi_2$  daher auch  $\vartheta = 0$ , ferner  $\varepsilon$  berechenbar aus der Distanz der beiden axialen Komponenten. Hiermit ist, wie schon Voigt gezeigt hat, die wichtige Dispersionskonstante  $K$  berechenbar.<sup>1)</sup>

Die oben angedeutete Bestimmung der in  $\alpha' \pm \sigma'$  und  $\psi_1 \pm \psi_2$  vorkommenden Konstanten führt zu folgenden später zu benutzenden Gleichungen. Da  $\psi_2$  von niederm Grade ist als  $\psi_1$ , dessen erster Summand durch  $K\mu_1^{\varrho-1}$  gegeben ist, ergibt sich (vgl. Gleichung (41))

$$(63) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_1 + \psi_2 = K(\mu_1 - g_1')(\mu_1 - g_2') \dots (\mu_1 - g_{\varrho-1}') \\ \qquad = K \cdot g_1' g_2' \dots g_{\varrho-1}' \left( \frac{\mu_1}{g_1'} - 1 \right) \left( \frac{\mu_1}{g_2'} - 1 \right) \dots \left( \frac{\mu_1}{g_{\varrho-1}'} - 1 \right), \\ \psi_1 - \psi_2 = K \cdot g_1'' g_2'' \dots g_{\varrho-1}'' \left( \frac{\mu_1}{g_1''} - 1 \right) \dots \left( \frac{\mu_1}{g_{\varrho-1}''} - 1 \right), \\ \alpha' - \sigma' = (\mu_1 - h_1') \dots (\mu_1 - h_\varrho') = h_1' \dots h_\varrho' \left( \frac{\mu_1}{h_1'} - 1 \right) \dots \left( \frac{\mu_1}{h_\varrho'} - 1 \right), \\ \alpha' + \sigma' = (\mu_1 - h_1'') \dots (\mu_1 - h_\varrho'') = h_1'' \dots h_\varrho'' \left( \frac{\mu_1}{h_1''} - 1 \right) \dots \left( \frac{\mu_1}{h_\varrho''} - 1 \right). \end{array} \right.$$

Die Größen  $h$  sind laut (41) aus der Lage der Streifen bestimmbar.

1) Läßt man (vgl. Fußnote auf p. 495) die Voraussetzung fallen, daß an Stellen, deren Distanz vom Urstreifen groß ist gegen die Distanz der Zeemanstreifen, der Wert von  $(N - ik)^2$  zu derselben Grenze konvergiert, wie bei Abwesenheit des Feldes, kann  $\psi_2$  von *selbem* Grade wie  $\psi_1$  sein, braucht also bei einem Dublett nicht zu verschwinden. Wir haben dann  $\psi_2 = \vartheta' \mu_1^{\varrho-1}$  und statt (62)

$$A = \frac{2K\varepsilon + \vartheta' \mu_1}{\mu_1^2}.$$

Die (äußere) Drehung ist hier unsymmetrisch um den Urstreifen verteilt. Auffallende Unsymmetrien, wo die Drehung nur einerseits auftritt, sind von Wood beobachtet worden.

Die Größen  $g$  geben jene zwischen je zwei  $h$ -Werten gelegenen Werte des  $\mu_1$  an, für welche  $N = 1$ ,  $h = 0$  ist. Die  $h$  und  $g$  sind also gleicher Größenordnung. Durch die relativen Intensitäten  $\vartheta$  der Komponenten sind, wie schon p. 496 bemerkte, auch die Koeffizienten in  $\psi_1 \pm \psi_2$  gegeben.

17. Die einfachste Möglichkeit, daß sich in den in (60) vorkommenden Brüchen  $(f - \sigma)/(\alpha + \sigma)$  bzw.  $(f + \sigma)/(\alpha - \sigma)$  gewisse Polynome in Zähler und Nenner fortheben, ist die, daß  $f, \sigma, \alpha$  einen gemeinschaftlichen Teiler  $\vartheta = \vartheta(\mu_1)$  besitzen; eine weitere, daß jeder der Brüche für sich durch einen ähnlichen Faktor  $\chi$  bzw.  $\varphi$  abkürzbar ist. Wir setzen also, um von (60) auf (61) zu kommen:

$$(64) \quad \begin{cases} \alpha - \sigma = \chi \cdot \vartheta(\alpha' - \sigma'), & \alpha + \sigma = \varphi \cdot \vartheta(\alpha' + \sigma'), \\ f + \sigma = \chi \cdot \vartheta(\psi_1 + \psi_2), & f - \sigma = \varphi \cdot \vartheta(\psi_1 - \psi_2). \end{cases}$$

Die Polynome  $\chi$  und  $\varphi$  besitzen keinen gemeinschaftlichen Teiler, da man ihn ja hätte zu  $\vartheta$  schlagen können; sie sind von selbem Grade bezüglich des  $\mu_1$ , da der Grad von  $\sigma'(\sigma)$  kleiner ist als jener von  $\alpha'(\alpha)$ . Die Zahlenfaktoren bei den höchsten Potenzen von  $\mu_1$  in  $\chi$  und  $\varphi$  sind gleich. Wir dürfen dieselben = 1 setzen, da es erlaubt ist, sie zu  $\vartheta$  zu schlagen. Dann aber muß auch die höchste  $\mu_1$ -Potenz in  $\vartheta$  den Faktor 1 besitzen, da er in  $\alpha$  und  $\alpha'$  gleichfalls Eins ist. Schreibt man abkürzend

$$(65) \quad L = \frac{\varphi + \chi}{2} \vartheta, \quad M = \frac{\varphi - \chi}{2} \vartheta,$$

so wird der Grad von  $M$  niedriger sein als jener von  $L$ .

Aus (64) folgt

$$(66) \quad \begin{cases} \alpha = L\alpha' + \sigma' M, & \sigma = M\alpha' + \sigma' L = -M\psi_1 + \psi_2 L, \\ f = \psi_1 L - \psi_2 M, & \alpha^2 - \sigma^2 = \vartheta^2 \varphi \chi (\alpha'^2 - \sigma'^2), \end{cases}$$

$$(67) \quad \frac{M}{L} = \frac{\psi_2 - \sigma'}{\alpha' + \psi_1} = \frac{\varphi - \chi}{\varphi + \chi},$$

$\psi_1$  und  $\sigma'$  verschwinden mit dem Felde, daher auch  $M$ .

Aus (67) folgt

$$\varphi + \chi = \Gamma(\alpha' + \psi_1), \quad \varphi - \chi = \Gamma(\psi_2 - \sigma').$$

Die  $\varphi, \chi, \alpha', \psi_1$  sind rationale ganze Funktionen von  $\mu_1$  und zwar irreduzible Polynome von  $\mu_1$ , wie wir allgemeinheits-

halber annehmen müssen. Es muß also  $\Gamma$  gleichfalls eine rationale Funktion sein, im allgemeineren Falle ein Bruch mit dem Nenner  $N$ , der sowohl in  $(\alpha' + \psi_1)$  als auch in  $(\psi_2 - \sigma')$  enthalten sein müßte. Dies ist aber ausgeschlossen, da auch  $\alpha' + \psi_1$  ein irreduzibles Polynom sein muß, wenn es die  $\alpha'$ ,  $\psi_1$  sind. Auch sein Zähler kann kein Polynom sein, weil  $\varphi + \chi$  gleichfalls irreduzibel ist. Es ist also  $\Gamma$  eine Konstante = 2, weil die höchste Potenz in  $\varphi + \chi$  den Faktor 2, jene in  $\alpha' + \psi_1$  den Faktor 1 besitzt. Hieraus folgt

$$(68) \quad \begin{cases} \varphi = \alpha' + \psi_1 + \psi_2 - \sigma', \\ \chi = \alpha' + \psi_1 - (\psi_2 - \sigma'). \end{cases}$$

Aus (65), (68) folgt dann die Gleichungsreihe

$$(69) \quad L = (\alpha' + \psi_1) \vartheta, \quad M = (\psi_2 - \sigma') \vartheta,$$

ferner (vgl. (66))

$$\begin{aligned} a &= \vartheta [(\alpha' + \psi_1) \alpha' + \sigma' (\psi_2 - \sigma')], \\ f &= \vartheta [\psi_1 (\alpha' + \psi_1) - \psi_2 (\psi_2 - \sigma')], \\ \sigma &= \vartheta (\psi_2 \alpha' + \psi_1 \sigma'), \\ (\alpha'^2 - \sigma'^2) &= (\alpha'^2 - \sigma'^2) \vartheta^2 [(\alpha' + \psi_1)^2 - (\psi_2 - \sigma')^2]. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in (57), (58) ein, folgt

$$(70) \quad (N - ik_s)^2 = 1 + \frac{\psi_1 (\alpha' + \psi_1) - \psi_2 (\psi_2 - \sigma')}{\alpha' (\alpha' + \psi_1) + \sigma' (\psi_2 - \sigma')} = 1 + \frac{Z_s}{N_s},$$

$$(71) \quad (N - ik_p)^2 = 1 + \frac{\vartheta [\psi_1 (\alpha' + \psi_1) - \psi_2 (\psi_2 - \sigma')] - \gamma}{\vartheta [\alpha' (\alpha' + \psi_1) + \sigma' (\psi_2 - \sigma')] + \gamma} = 1 + \frac{\vartheta Z_s - \gamma}{\vartheta N_s - \gamma}.$$

Da die  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\alpha'$ ,  $\sigma'$  bekannte Funktionen von  $\mu_1$  sind, ergibt sich das wichtige Resultat, daß der transversale  $s$ -Effekt schon als gegeben zu betrachten ist, wenn der axiale bekannt ist. Da  $\alpha'$  die höchste Potenz von  $\mu_1$ , die  $\varrho^{te}$ , in sich schließt, gibt es im transversalen  $s$ -Effekte 2  $\varrho$ -Streifen, also genau so viel als in beiden axialen Effekten zusammen.

18. Wir wollen noch zeigen, daß die  $a$ -Streifen und die  $s$ -Streifen an denselben Stellen gelegen sind, wenn die charakteristische Dispersionskonstante  $K$  gegenüber den in (63) vorkommenden Größen  $g$ ,  $h$  einen verschwindend kleinen Wert besitzt.

Die Orte der wirklichen  $\alpha$ -Streifen liegen an den Stellen der Wurzeln von

$$(\alpha' + \sigma')(\alpha' - \sigma') = \alpha'^2 - \sigma'^2 = 0,$$

jene der  $s$ -Streifen bei

$$\alpha'^2 - \sigma'^2 + (\alpha' \psi_1 + \sigma' \psi_2) = 0.$$

Nennt man einen der in (63) vorkommenden Faktoren  $(\mu_1/g_1 - 1)$  bzw.  $(\mu_1/h_1 - 1) \dots$  kurz  $F$  (es sind Faktoren gleicher Größenordnung, da es ja die  $g$  und  $h$  sind), so hat  $(\alpha'^2 - \sigma'^2)$  solcher Faktoren  $2\varrho$  und nebenbei den Faktor  $(h'_1 h''_1) \dots (h'_e h''_e)$ . Das Polynom  $2\alpha'$  bzw.  $2\sigma'$  ist gegeben durch

$$h'_1 h'_2 \dots h'_e (\varrho \text{ Faktoren } F) \pm h''_1 \dots h''_e (\varrho \text{ Faktoren } F),$$

ferner

$$2(\psi_1 \pm \psi_2) = K g'_1 \dots g'_{e-1} (\varrho - 1 \text{ Faktoren } F) \\ \pm K g''_1 \dots g''_{e-1} (\varrho - 1 \text{ Faktoren } F).$$

Ist nun das Produkt  $K g'_1 \dots g'_{e-1}$  verschwindend klein gegen das Produkt  $h'_1 \dots h'_e$ , so ist, weil die  $g$  und  $h$  Größen gleicher Ordnung sind, auch  $K/h$  eine verschwindend kleine Zahl und umgekehrt. Ordnet man daher die Gleichung

$$\alpha'^2 - \sigma'^2 + (\alpha' \psi_1 + \sigma' \psi_2) = 0$$

nach Potenzen von  $\mu_1$ , so werden die Koeffizienten des Polynoms  $\alpha'^2 - \sigma'^2$  infolge des zweiten Gliedes  $(\alpha' \psi_1 + \sigma' \psi_2)$  relativ nur um Beträge der Ordnung  $K/h$  abgeändert, d. h. die Streifen des Transversaleffektes werden mit jenen des axialen sehr nahe zusammenfallen. Daß  $K/h$  in Wirklichkeit sehr kleine Werte besitzt, läßt sich folgendermaßen zeigen.

Aus der Gleichung

$$\mu_1 = v^2 - 2 p_1 v + n_1^2 = h_j$$

folgt, wenn nach  $v$  aufgelöst wird,

$$\Delta p_1 = 0, \quad \Delta q_1 = -\frac{h_j}{2 q_1} \text{ laut Gleichung (41a)}$$

und

$$h_j = -2 q_1^2 \cdot \frac{\Delta q_1}{q_1}.$$

Setzt man in stärkeren Feldern für die relative Änderung  $\Delta q_1/q_1$  der Schwingungszahl  $1/20000$ , für  $q_1$  (Natriumlicht) den

Wert  $3,2 \cdot 10^{15}$  im Sekundenmaße, so wird  $h_j$  eine Größe der Ordnung  $10^{27}$ .

Dagegen ergibt sich aus Geigers Messungen (Voigt, Magnetooptik p. 143) für die Natriumlinien (5896, 5890), (3303, 3302), die Kaliumlinien (7702, 7669), (4047, 4044), die Lithiumlinie 6708 gleichfalls im Sekundenmaße

$$K \cdot 10^{-23} = (1,63, 4,83), (1,70, 4,20),$$

$$(21,0, 46,2), (0,825, 1,04), 5,20.$$

Ersichtlich ist  $K/h_j$  eine sehr kleine Zahl von der Ordnung  $10^{-4}$  und dies auch in dem ungünstigsten Falle der Kaliumlinien.

Das Zusammenfallen der  $a$ - und  $s$ -Streifen ist daher eine Folge der relativen Kleinheit von  $K/h$ . Auch die Elektronentheorie des einfachen Zeemantriplets führt, wie wir später sehen werden, nur unter dieser Bedingung zu dem gleichen Resultate.

**19.** Sind die  $p$ -Streifen nach Intensität und Lage vorgeschrieben, so läßt sich zufolge des früher Gesagten das zugehörige  $(N - ik)_p^2$  darstellen in der Form

$$(72) \quad \left\{ \begin{aligned} (N - ik)_p^2 &= 1 + \frac{Z_p}{N_p} = 1 + \frac{K(\mu_1 - G_1)(\mu_1 - G_2) \dots (\mu_1 - G_{\pi-1})}{(\mu_1 - H_1)(\mu_1 - H_2) \dots (\mu_1 - H_{\pi})} \\ &= 1 + \frac{K \mu_1^{\pi-1} + K_2 \mu_1^{\pi-2} + \dots}{\mu_1^{\pi} + B_1 \mu_1^{\pi-1} + \dots} \end{aligned} \right.$$

Dabei bedeutet  $\pi$  die gegebene Zahl der Streifen,  $G_j$  die Orte  $N=1, k=0$ ,  $H_j$  die Orte der Streifen,  $K_2$  usw.,  $B_1$  usw. Koeffizienten, die mit dem Felde verschwinden. Die Frage ist aber die, ob sich (72) aus den Differentialgleichungen (9), d. h. aus (71) herleiten läßt. Der Wert von  $\gamma$ , des Maßes der Doppelbrechung, ist als gegeben zu betrachten. Es soll sich also ein Polynom  $\vartheta$  (Gleichung (71)) so bestimmen lassen, daß (71) mit (72) identisch wird. Dies fordert

$$(72a) \quad \gamma = \frac{\vartheta(N_p Z_s - Z_p N_s)}{Z_p + N_p}.$$

Die Polynome  $Z_p, N_p, Z_s, N_s$  gehören zum Transversaleffekt, ihre Koeffizienten sind paare Funktionen der Feldstärke. Im allgemeinen sind sie gleichwie  $(N_p Z_s - N_s Z_p)$  irreduzibel.

Es kann daher, weil  $\gamma$  gleichfalls ein irreduzibles Polynom sein wird, der Nenner  $Z_p + N_p$  nur noch in dem einzigen disponiblen Polynom  $\vartheta$  als ein Faktor enthalten sein; der andere,  $C$ , muß konstant sein, weil ja sonst  $\gamma$  gegen die Annahme reduzierbar wäre. Überdies muß  $C$  gleich Eins sein, weil in der aus (72a) folgenden Relation  $\vartheta = C(N_p + Z_p)$  die höchste Potenz von  $\mu_1$  in  $\vartheta$  und in  $Z_p + N_p$  den Faktor 1 besitzt. Es gilt also

$$(72b) \quad \vartheta = (N_p + Z_p) \quad \text{und} \quad \gamma = N_p Z_s - N_s Z_p.$$

$\gamma$  ist offenbar eine paare Funktion der Feldstärke, die mit dem Felde verschwindet, weil in diesem Falle  $Z_s/N_s$  und  $Z_p/N_p$  zu demselben Werte  $K/\mu_1$  konvergieren, ganz wie es zu erwarten war, da  $\gamma$  als Maß der Doppelbrechung bezeichnet wurde.

Einführung des  $\vartheta$ -Wertes in (69) gibt bei Berücksichtigung von (70)

$$(73) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = (Z_p + N_p) N_s, \quad f = (Z_p + N_p) Z_s, \\ F = f + \alpha = (Z_p + N_p)(Z_s + N_s), \\ \sigma = (Z_p + N_p)(\psi_2 \alpha' + \psi_1 \sigma'), \\ \alpha^2 - \sigma^2 = (\alpha'^2 - \sigma'^2)(Z_p + N_p)^2(Z_s + N_s). \end{array} \right.$$

Aus (73) folgt ferner

$$f - \gamma = Z_p(Z_s + N_s), \quad \alpha + \gamma = N_p(N_s + Z_s).$$

Die Größen  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $F$ ,  $\sigma$ ,  $f$  in Gleichungen (55), (56), (57), (58) sind also insgesamt als bekannt anzusehen, wenn die  $a$ - und  $p$ -Streifen gegeben sind.

20. Wir benutzen (73), um mit Hilfe von (54) die Streifenlagen zu finden, wenn der Strahl das Medium in einer gegen das Feld geneigten Richtung durchsetzt. Nach Entfernung der Irrationalität im Nenner (54) ergibt sich

$$(74) \quad \left\{ \begin{array}{l} (N - ik)^2 = \frac{(f + \alpha) \left( \alpha + \frac{\gamma}{2} \sin^2 \varphi \mp \sqrt{\gamma^2 \frac{\sin^4 \varphi}{4} + \sigma^2 \cos^2 \varphi} \right)}{(\alpha^2 - \sigma^2) \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \alpha (\alpha + \gamma)} \\ = \frac{(Z_p + N_p) N_s + \frac{\gamma}{2} \sin^2 \varphi \mp \sqrt{\gamma^2 \frac{\sin^4 \varphi}{4} + \sigma^2 \cos^2 \varphi}}{(Z_p + N_p)(\alpha'^2 - \sigma'^2) \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi N_p N_s}. \end{array} \right.$$

Die Streifenlagen sind durch die Nennerwurzeln von (74) bestimmt. Die Sache wird einfacher, wenn  $K/h_j$  verschwindend

kleine Werte besitzt. Die Größen  $G_j$ ,  $H_j$  in (72) sind der selben Ordnung wie die  $g_j$ ,  $h_j$  in (63). Hebt man in (72) die  $G_j$  bzw. die  $H_j$  heraus, um die Größenordnung des  $Z_p/N_p$  festzustellen, so enthält der Zähler  $\pi - 1$  Faktoren wie  $(\mu_1/G_j - 1)$ , den Faktor  $K$  und  $(G_1 G_2 \dots G_{\pi-1})$ . Im Nenner stehen  $\pi$  Faktoren wie  $(\mu_1/H_j - 1)$ , ferner das Produkt  $H_1 H_2 \dots H_n$ . Führt man aus (72) die  $Z_p N_p$  im Nenner (74) ein, berücksichtigt, daß  $\alpha'^2 - \sigma'^2$  sich von  $N_s$  nur um ein mit  $K/h_j$  multipliziertes Polynom niedriger Ordnung unterscheidet, so wird sich der Nenner in (74) reduzieren auf  $N_p N_s + (K/h_j) \Phi$ , wobei  $\Phi$  ein Polynom von niedrigem Grade als  $N_p N_s$  vorstellt. Ordnet man nach Potenzen von  $\mu_1$ , werden sich die Koeffizienten des vollständigen Nenners von jenen des Polynoms  $N_p N_s$  nur um Größen unterscheiden, welche sich zu den ersteren verhalten wie  $K:h_j$ . Im Grenzfalle liegen daher die Nennerwurzeln bei  $N_p = 0$ ,  $N_s = 0$ .

Statt (74) setzen wir noch

$$(74a) \quad (N - ik)^2 = 1 + \frac{Z_p N_s \sin^2 \varphi + \frac{\gamma}{2} \sin^2 \varphi \mp \sqrt{\gamma^2 \frac{\sin^4 \varphi}{4} + \sigma^2 \cos^2 \varphi}}{N_s N_p + (K/h_j) \Phi}.$$

Die Streifen liegen also unabhängig von  $\varphi$ , der Neigung des Strahles gegen das Feld, an den Orten  $N_s = 0$ ,  $N_p = 0$  des transversalen Effektes. Die zweite Streifengruppe  $N_p = 0$  entfällt jedoch für  $\varphi = 0$ . Denn es folgt aus (74) für  $\varphi = 0$  nach Einführung des  $N_s$  aus (70) und des  $\sigma$  aus (73)

$$\begin{aligned} (N - ik)^2 &= \frac{N_s (Z_p + N_p) \mp \sigma}{(Z_p + N_p)(\alpha'^2 - \sigma'^2)} \\ &= \frac{(Z_p + N_p)[N_s \mp (\psi_2 \alpha' + \psi_1 \sigma')]}{(Z_p + N_p)(\alpha'^2 - \sigma'^2)} = 1 + \frac{\psi_1 \mp \psi_2}{\alpha' \pm \sigma}. \end{aligned}$$

Die Kürzung des Faktors  $(Z_p + N_p)$ , welcher im Nenner zu den Wurzeln von  $Z_p + N_p = 0$  und  $\lim K/h_j = 0$  zu jenen von  $N_p = 0$  geführt hätte, läßt sich auch so deuten, daß die Zähler der zu den Wurzeln von  $N_p + Z_p = 0$  gehörigen Teilbrüche Null werden. Anders gesagt, die Intensität der zweiten Streifengruppe  $N_p = 0$  wird Null für  $\varphi = 0$ .

**21.** Die Polarisation der „schießen“ Streifen ergibt sich aus der nochmals hergeschriebenen Formel (53) unter Benutzung von (72b), (73)

$$(75) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{A}{B} = i(\beta \pm \sqrt{1 + \beta^2}), \\ \beta = \frac{\gamma}{2\sigma} \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\sin^2 2\varphi}{2 \cos \varphi} \frac{N_p Z_s - Z_p N_s}{(Z_p + N_p)(\psi_2 \alpha' + \psi_1 \sigma')} \end{array} \right.$$

Für jene  $\mu_1$ , welche  $N_s = 0$  machen, gilt nach Einführung von  $Z_s$  aus (70)

$$\beta = \frac{\sin^2 \varphi}{2 \cos \varphi} \frac{1}{1 + \frac{Z_p}{N_p}} \frac{\psi_1 (\alpha' + \psi_1) - \psi_2 (\psi_2 - \sigma')}{\psi_2 \alpha' + \psi_1 \sigma'}.$$

Laut (63) sind die  $\psi_1$  und  $\psi_2$  mit  $K/h_j$  proportional, daher  $\beta$  endlich, wenn  $K/h_j$  zu Null konvergiert.

Die Streifen  $N_s = 0$  sind daher entgegengesetzt elliptisch polarisiert. Die Bahnachsen fallen in die Meridianebebene, bzw. stehen zu ihr senkrecht, denn alle hier vorkommenden Größen  $\psi_1 \sigma' \psi_2 \alpha'$  sind bei verschwindender Dämpfung real. Für solche  $\mu_1$ , welche den Wurzeln von  $N_s = 0$  infinitesimal nahe kommen, lässt sich im Zähler (74a) zufolge (72b), (73) setzen

$$\sigma = N_p (\psi_2 \alpha' + \psi_1 \sigma'), \quad \gamma = N_p Z_s$$

und man hat

$$(N - ik)^2 = 1 + \frac{\frac{\sin^2 \varphi}{2} Z_s \mp \sqrt{\frac{Z_s^2 \sin^4 \varphi}{4} + \cos^2 \varphi (\psi_2 \alpha' + \psi_1 \sigma')^2}}{N_s}.$$

Für die andere Streifengruppe  $N_p = 0$  ist laut (75) im Grenzfalle

$$\beta = -\frac{\sin^2 2\varphi}{2 \cos \varphi} \cdot \frac{N_s}{\psi_2 \alpha' + \psi_1 \sigma'} = -\frac{\sin^2 2\varphi}{2 \cos \varphi} \frac{\alpha' (\alpha' + \psi_1) + \sigma' (\psi_2 - \sigma')}{\psi_2 \alpha' + \psi_1 \sigma'}.$$

Es wird daher  $\lim K/h_j = 0$  die Größe  $\beta$  unendlich groß, und weil  $\beta$  bei verschwindender Dämpfung real ist, werden laut (75) die Bahnellipsen unendlich gestreckt sein, d. h. diese Streifen sind linear polarisiert, ihre Schwingungen elektrischer Art sind in der Meridianebebene enthalten oder stehen zu ihr senkrecht. Weil in diesem Falle wegen  $\beta = \infty$   $\sigma$  gegen  $\gamma$  zu vernachlässigen ist, wird laut (74a) und (72b)

$$(N - ik)^2 = 1 + \sin^2 \varphi \frac{Z_p}{N_p} \left( 1 - \frac{1 \mp 1}{2} \right).$$

Dem oberen Zeichen entsprechen,  $\beta = +\infty$ , elektrische Schwingungen parallel der Meridianebebene ( $A/B = \infty$ ), dem unteren senkrecht hierzu ( $A/B = 0$ ). Streifen letzterer Polarisationsart treten wegen  $(N - ik)^2 = 1$  nicht auf. Für  $\beta = -\infty$  umgekehrt.

Daher wird auch nur *eine* der beiden linearen Polarisationsarten bei den  $N_p = 0$ -Streifen zu erwarten sein. Die Schwingungen der zweiten Streifengruppe sind entsprechend einem stetigen Übergang in die *transversalen p-Streifen* in der Meridianebene enthalten.

Unsere Theorie liefert dann folgendes Bild der Erscheinung. Die entgegengesetzt zirkularen Streifen des Axialeffektes verwandeln sich mit wachsendem  $\varphi$  in entgegengesetzt elliptische, haften an *derselben* Farbe und endigen in den linearen *s-Streifen* des Transversaleffektes. Mit wachsendem  $\varphi$  treten neue *linear-polarisierte* Streifen auf, deren elektrische Schwingungen parallel zur Meridianebene erfolgen. Auch sie haften an der Farbe und münden bei  $\varphi = 90^\circ$  in den *p-Streifen* des Transversaleffektes. Das Gesagte gilt genau für verschwindend kleine  $K/h$ .

Dies entspricht der Erfahrung. Voigt (Magnetooptik, p. 60) bemerkt über gewisse Versuche dieser Art, die im Göttinger Institut angestellt wurden, folgendes. „In einer gegen die Kraftlinien geneigten Richtung sendet die Lichtquelle einsteils lineare elektrische Schwingungen aus, die in der Meridianebene durch die Kraftlinien verlaufen, anderenfalls zwei Arten elliptischer Schwingungen mit entgegengesetztem Rotationssinn und mit Achsen, die normal zur Meridianebene liegen.“

22. Im Sinne unserer Theorie sind die *s-Streifen* schon bestimmt, wenn die *a-Streifen* gegeben sind, die *p-Streifen* bleiben willkürlich wählbar. Ist, wie wir annehmen, die Zahl der letzteren die Hälfte der *s-Streifen*, also  $\pi = \varrho$ , wird (vgl. (72))

$$Z_p = K(\mu_1 - G_1) \dots (\mu_1 - G_{\varrho-1}).$$

Ferner ist  $N_p = \mu_1^{\varrho} + U$ , wobei  $U$  ein Polynom  $\varrho - 1^{\text{ten}}$  Grades vorstellt mit Koeffizienten, die mit dem Felde verschwinden. Ist speziell  $\varrho = 1$ , wird  $N_p = \mu_1 + a$ ,  $Z_p = K$ , wobei  $a$  nur vom Felde abhängt und Null zu setzen ist, falls der *p-Streifen* an der Stelle des Urstreichens verbleibt. Weil für  $\varrho = 1$  dem früheren zufolge  $\psi_2 = 0$  und  $\psi_1 = K$  ist, gilt, da  $\alpha'$  eine lineare Funktion von  $\mu_1$  sein muß,

$$(N - ik)^{\varrho}_{\pm} = 1 + \frac{K}{\mu_1 + g_0 \pm \sigma'},$$

ferner laut (70)

$$(N - i k)^2_s = 1 + \frac{\psi_1(\alpha' + \psi_1)}{\alpha'(\alpha' + \psi_1) - \sigma'^2} = 1 + \frac{K(\mu_1 + g_0 + K)}{(\mu_1 + g_0)^2 + (\mu_1 + g_0)K - \sigma'^2},$$

und angenähert bei sehr kleinen  $K/h_j$

$$(N - i k)^2_s = 1 + \frac{K}{2} \left( \frac{1}{\mu_1 + g_0 - \sigma'} + \frac{1}{\mu_1 + g_0 + \sigma'} \right),$$

ferner

$$(N - i k)^2_p = 1 + \frac{K}{\mu_1 + \alpha}.$$

Das longitudinale *normale* Dublett ( $g_0 = 0$ ) kann man sich beispielsweise aus der Mittellinie des *normalen* transversalen Triplets ( $\alpha = 0$ ) durch eine nach rechts und links erfolgte Verschiebung um  $\sigma'$  erzeugt denken.

Man kann dies verallgemeinern. Liegen die  $p$ -Streifen an den Stellen  $\mu_1 = H_1 \dots, H_e$ , so bekommt man jedenfalls eine mögliche Lage der  $a$ - und  $s$ -Streifen, wenn das System der  $p$ -Streifen samt den zugehörigen Stellen  $N=1$ ,  $k=0$ , die durch  $\mu_1 = G_1 \dots, G_{e-1}$  gegeben sind, nach links und rechts um denselben Betrag  $g$  verschoben wird. In Symbolen ausgedrückt, heißt dies

$$(76) \begin{cases} \alpha' + \sigma' = (\mu_1 + g - H_1)(\mu_1 + g - H_2) \dots (\mu_1 + g - H_e), \\ \alpha' - \sigma' = (\mu_1 - g - H_1)(\mu_1 - g - H_2) \dots (\mu_1 - g - H_e). \end{cases}$$

Man kann dabei  $g$  so groß wählen, daß alle rechtszirkularen Streifen auf eine, alle linkszirkularen auf die andere Seite des Urstreichens zu liegen kommen. In der Tat ist diese Anordnung der  $a$ -Streifen häufig beobachtet worden.<sup>1)</sup> Eine einfache Konstruktion zeigt, daß zu einem der Lage und Intensität nach symmetrischen  $p$ -System ein  $\pm a$ -System gehören wird, in welchem einem  $+a$ -Streifen *rechts* ein symmetrisch gelegener  $-a$ -Streifen gleicher Intensität links zugeordnet ist.

23. Dagegen würde die Annahme, daß wenn die  $a$ -Streifen durch  $\alpha' \pm \sigma' = 0$  gegeben sind, die  $p$ -Streifen durch  $\alpha' = 0$  bestimmt sein könnten, zu Widersprüchen führen (außer es sei  $\rho = 1$ ). Setzt man beispielshalber symmetrische Verteilung der  $a$ -Streifen voraus, also

$$\begin{aligned} \alpha' + \sigma' &= (\mu_1 + H_1) \dots (\mu_1 + H_e), \quad H_j > 0, \\ \alpha' - \sigma' &= (\mu_1 - H_1) \dots (\mu_1 - H_e), \end{aligned}$$

1) H. Kayser, Handb. d. Spektroskopie 2. p. 672. Abbildung 57.

so läßt sich leicht zeigen, daß  $\alpha' = 0$  im äußersten Falle nur die eine *reale* Wurzel  $\mu_1 = 0$  besitzt. Das  $p$  Streifen-system bestünde dann nicht oder höchstens aus einer Linie (für  $\varrho = 1$ ).

24. Das System (76) ist praktisch identisch mit der Voigtschen Lösung des Problems komplizierter Zeeman-Effekte in Gasen (Magnetooptik p. 186 ff.). Bei Benutzung unserer Symbole liegen (Gleichung  $k + i h v - m v^2 + v \Re = 0$  p. 194 l. c. bei Voigt) die  $p$ -Streifen an den Orten  $\mu_1 = H'_1 n$ , wo  $H'_1 \dots H'_e$  reale Wurzeln der Gleichung

$$\left(\frac{\mu_1}{n} - H'_1\right) \dots \left(\frac{\mu_1}{n} - H'_e\right) = 0$$

vorstellen. Es ist dies die schon früher erwähnte Form der Gleichungen, welche notwendigerweise an Symmetrie der Streifenlagen gebunden ist.

Die Lagen für den axialen Effekt erhält man, wenn das in  $\mu_1$  vorkommende  $p_1$  um eine komplexe vom Felde allein abhängige Konstante ( $\varepsilon \pm \eta i$ ) vermehrt wird. Eingeführt in obige Gleichung ergibt dies, wenn entsprechend sehr kleiner Dämpfung statt  $-2n\varepsilon$  bzw.  $2n\eta$  die konstanten Werte

$$g' = -2n_1\varepsilon, \quad 2n_1\eta = g, \quad H'_j n = H'_j n_1 = H_j$$

gesetzt werden,

$$(\mu_1 - H_1) \dots (\mu_1 - H_e) = 0 \text{ für die } p\text{-Streifen},$$

$$(\mu_1 \pm g - H_1 + ig')(\mu_1 \pm g - H_2 + ig') \dots (\mu_1 \pm g - H_e + ig') = 0 \\ \text{für die } \pm a\text{-Streifen.}$$

Das Glied  $ig'$  kann mit  $2p_1 n i = 2p_1 n_1 i$  in  $\mu_1$  kontrahiert werden und entspricht einer realen Änderung von  $p_1 n$ , die bei verschwindender Dämpfung derselben Größenordnung wie  $p_1 n_1$  sein muß und weggelassen werden kann. Das führt aber zu Gleichung (76).

Es ist nicht ohne Interesse, die Voraussetzungen der Voigtschen Lösung in etwas freierer Darstellung zu erwähnen. Es werden  $\varrho$  Elektronen angenommen, die in unmagnetisiertem Zustande alle in gleicher Weise sich pendelnd bewegen können. Ihre Exkursionen zur Zeit  $t$  seien  $\xi_1 \eta_1 \zeta_1 \dots \xi_\varrho \eta_\varrho \zeta_\varrho$ . Das äußere Magnetfeld ( $z$ -Achse) wird Ursache von mechanischen Koppelungskräften  $X_1 Y_1 Z_1 \dots X_\varrho Y_\varrho Z_\varrho$ , welche homogene

lineare Funktionen der Geschwindigkeiten  $\xi_1 \eta_1 \zeta_1 \dots \xi_e \eta_e \zeta_e$  sind. Die Kräfte  $Z_j$  sollen nur von  $\zeta_j$ , die  $X_j Y_j$  nur von den  $\xi_j, \eta_j$  abhängen.

Diese Annahme ist, wie wir zeigen wollen, gleichwertig mit unserer direkt eingeführten Voraussetzung, daß zweimal so viel  $a$ -Streifen vorkommen als  $p$ -Streifen. Nehmen wir mit Voigt gleich im Vorhinein an, daß die von der Dämpfung herrührenden, in den  $X_j Y_j Z_j$  schon enthaltenen Kräfte den Exkursionsgeschwindigkeiten  $\xi \eta \zeta$  proportional sind und vom Felde nicht abhängen, so können wir unter den  $X_j Y_j Z_j$  die eigentlichen vom Magnetismus herrührenden Koppelungskräfte verstehen. Im Sinne der Elektronentheorie leistet das äußere Magnetfeld keine Arbeit an bewegten Elektronen. Daher ist  $Z_j$  eine lineare Funktion der  $\zeta_1 \dots \zeta_e$  mit Koeffizienten

$$h_{jj} = 0, \quad h_{jk} = -h_{kj}.$$

Für die Kräfte  $X_j$  ergeben sich Ausdrücke wie

$$X_j = A(\xi) + B(\eta),$$

wobei  $A(\xi)$ ,  $B(\eta)$  homogene lineare Funktionen der  $\xi$  bzw.  $\eta$  bezeichnen. Aus der Gleichwertigkeit aller äquatorialen Koordinatensysteme  $xy$  folgt

$$Y_j = A(\eta) - B(\xi),$$

daher

$$X_j \pm i Y_j = A(\xi \pm \eta i) - i B(\xi \pm \eta i).$$

Der Bedingung

$$\sum_{j=1}^{j=e} (X_j \xi_j + Y_j \eta_j) = 0,$$

welche ausdrückt, daß das äußere Feld an den Elektronen keine Arbeit leisten kann, wird für jedes  $\xi_j, \eta_j$  nur dann genügt, wenn die in  $A(\xi)$  vorkommenden Koeffizienten der Bedingung  $f_{jj} = 0$ ,  $f_{jk} = -f_{kj}$  und jene in  $B$  der Bedingung  $g_{jj} = g_{kj}$  Genüge leisten.<sup>1)</sup> (Voigt supponiert noch  $g_{jj} = g$  für jedes  $j$ .)

1) Der Beweis läßt sich führen unter Zuhilfenahme des Satzes, daß  $n$  homogene lineare Funktionen  $\Phi_1, \Phi_2 \dots \Phi_n$  der Veränderlichen  $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$  sich darstellen lassen in der Form

$$\Phi_j = \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_j} + \Phi_j, \quad j = 1 \dots n,$$

wobei  $\Phi_j$  eine homogene lineare Funktion der  $\varphi_1 \dots \varphi_n$  mit den Koeffi-

Schreibt man die betreffenden Differentialgleichungen für die  $x$ ,  $y$ -Bewegungen auf, so ergeben sich für die den beiden zirkularen Bewegungen entsprechenden komplexen Exkursionen  $\xi_j \pm \eta_j i$  Formeln von genau demselben Typus wie für  $\zeta_j$ , nur daß an Stelle der zu  $\zeta$  gehörigen Koeffizienten  $h_{jk}$  komplexe Koeffizienten und an Stelle der elektrischen Feldstärke  $Z$  der komplexe Wert  $X + iY$  tritt. Die Behandlung beider Probleme ist identisch, so daß sich tatsächlich zweimal so viel  $a$ -Streifen ergeben als  $p$  Streifen.

25. Die auf der Elektronentheorie basierenden Theorien des Zeeman-Effektes sind unstreitig sehr anschaulicher Natur, aber in ihren Folgerungen durch gewisse unzweideutig bestimmte Aussagen der Grundannahmen eingeengt. Glänzenden Resultaten auf einer Seite lassen sich andererseits schwerwiegende Widersprüche mit der Erfahrung entgegenstellen. So z. B. läßt sich die von H. Becquerel und Deslandres<sup>1)</sup> beobachtete Tatsache, daß bei gewissen Spektrallinien die Mittellinie eines Triplets senkrecht, dagegen die äußeren parallel zum Felde schwingen, vom Standpunkte der Elektronentheorie gar nicht verstehen. Die schwingenden Elektronen sind zumeist negativ, ihre  $e/m$ , die konstant sein sollen, variieren in sehr weiten Grenzen. Die Drehung der Polarisationsebene in der äußeren Umgebung eines Spektralstreifens findet zwar in den weitaus überwiegenden Fällen im Sinne der Elektronentheorie statt, aber zahlreiche widersprechende Fälle wurden von Wood konstatiert. Auch die Rotationsrichtung der zirkularen Longitudinalkomponenten stimmt in vielen Fällen (J. Becquerel, Dufour) mit den Folgerungen der Elektronentheorie nicht überein, und zwingt zu der Annahme, daß positive Elektronen schwingen, deren  $e/m$  von gleicher Größenordnung ist wie jenes der negativen. Dies ist jedoch im Widerspruch mit der üblichen Deutung der an radioaktiven Stoffen beobachteten Erscheinungen: das  $e/m$  der positiven

---

zienten  $b_{jj} = 0$ ,  $b_{jk} = -b_{kj}$  und  $\Omega$  eine homogene quadratische Form von  $\varphi_1 \dots \varphi_n$  vorstellen. Die Funktionen  $A$  und  $B$  sind in dieser Weise darstellbar.

1) H. Becquerel u. H. Deslandres, Kaysers Handb. d. Spektroskopie 2. p. 620.

Elektronen soll nahezu 2000 mal kleiner sein als jenes der negativen.

Unsere Theorie knüpft an die Erklärung des Faraday-Effektes in Kristallen an, sie beweist nicht, daß im Felde ein Linienserfall stattfinden müsse, sondern nimmt dies als gegebene Tatsache an. Sie fragt vielmehr nach dem Minimum der Bedingungen, die gegeben sein müssen, damit die Lösung der Aufgabe für jede Wellenrichtung eindeutig möglich sei.

Formell umfaßt sie alle Theorien, die zu partiellen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten führen, ohne für deren physikalische Annahmen verantwortlich zu sein.

**26.** Wir wollen unsere allgemeinen Betrachtungen an der üblichen Theorie des normalen Triplets illustrieren. Die Excursionen  $\xi' \eta' \zeta'$  einer mit der Ladung  $e$  versehenen Masse  $m$  genügen drei Gleichungen wie

$$(77) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \xi'}{dt^2} = -n_1^2 \xi' + 2p_1 \frac{d \xi'}{dt} + \frac{e}{m} X \\ \qquad \qquad \qquad + \frac{e}{Vm} (\bar{\alpha} \frac{d \xi'}{dt} - \bar{\gamma} \frac{d \eta'}{dt}) \text{ usw.} \end{array} \right.$$

Darin bedeuten  $\bar{\alpha} \bar{\beta} \bar{\gamma}$  Komponenten des äußeren magnetischen Feldes,  $X Y Z$  die auf die elektrostatische Einheit bezogene elektrische Feldstärke,  $n_1^2$  die Konstante der quasielastischen Kräfte und das wesentlich negative  $p_1$  eine Dämpfungskonstante. Ist nur eine Art von Elektronen gegeben,  $N$  ihre Zahl im Einheitswürfel, so sind die elektrostatisch gemessenen Komponenten der Stromdichte gegeben durch

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial X}{\partial t} + Ne \frac{d \xi'}{dt} \text{ usw.}$$

Aus beiden Reihen der Maxwell'schen Gleichungen folgt nach Elimination der inneren magnetischen Kräfte

$$(78) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \bar{V}^2 \left( \Delta Z - \frac{\partial J}{\partial z} \right) \text{ usw.}; \quad J = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Die Größen

$$(79) \quad u = X + 4\pi Ne \xi', \quad v = Y + 4\pi Ne \eta', \quad w = Z + 4\pi Ne \zeta'$$

sind Komponenten eines evident transversalen Vektors, der sogenannten elektrischen Induktion.

Durch Elimination von  $\xi' \eta' \zeta$ ,  $X Y Z$  aus (77), (78), (79) ergeben sich bei Benutzung von (3a) die Gleichungen (9), in welchen jedoch  $\Psi$  zu unterdrücken ist. Die Konstanten der quadratischen Form  $2\Theta = c_{11} u^2 + \dots$  (Gleichung (7)) sind bei Benutzung der Abkürzungen

$$K = 4\pi N \frac{e^2}{m}, \quad \mu_1 = v^2 - n_1^2 - 2p_1 v, \quad \varepsilon = \frac{e}{m \bar{V}},$$

$$\mu = \mu_1 + K, \quad a = v \varepsilon \bar{\alpha}, \quad b = v \varepsilon \bar{\beta}, \quad c = v \varepsilon \bar{\gamma}$$

gegeben durch

$$c_{11} = \bar{V}^2 [\mu_1 \mu^2 + \mu (a^2 + b^2 + c^2) - K a^2] \text{ usw. . . . ,}$$

$$c_{12} = -a b K \bar{V}^2 \text{ usw.}$$

Ferner ist

$$F(v) = \mu (\mu^2 + a^2 + b^2 + c^2);$$

$$s_1 = \mu K \bar{V}^2 a, \quad s_2 = \mu K \bar{V}^2 b, \quad s_3 = \mu K \bar{V}^2 c.$$

Alle in (9) vorkommenden Konstanten sind also ganze Funktionen von  $v$  mit *realen* Koeffizienten. Der Vektor  $uvw$  ist dem früher Gesagten zufolge der Fresnelsche.

Verlegt man die  $z$ -Achse in die Feldrichtung ( $\bar{\alpha} = 0, \bar{\beta} = 0$ ), wird einfacher

$$\begin{aligned} \mu (\mu^2 + c^2) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \bar{V}^2 \left[ (\mu_1 \mu^2 + \mu c^2) \Delta u + K c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right. \\ &\quad \left. + \mu c K \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} \right) \right], \\ \mu (\mu^2 + c^2) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \bar{V}^2 \left[ (\mu_1 \mu^2 + \mu c^2) \Delta v + K c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right. \\ &\quad \left. + \mu c K \left( \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right], \\ \mu (\mu^2 + c^2) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \bar{V}^2 \left[ (\mu_1 \mu^2 + \mu c^2 - K c^2) \Delta w + K c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right. \\ &\quad \left. + \mu c K \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} \right) \right]. \end{aligned}$$

Man findet hieraus für die links- bzw. rechtszirkularen Wellen, die in der Feldrichtung laufen,

$$(N - i k)^2_{\pm} = \frac{\mu (\mu^2 + c^2)}{\mu_1 \mu^2 + \mu c^2 \pm \mu c K i} = 1 + K \mu \frac{\mu \mp i c}{\mu_1 (\mu^2 + c^2) \pm K c i (\mu \mp i c)}.$$

Das obere Zeichen entspricht der linken, das untere der rechten z-Welle.

Man sieht, daß hier tatsächlich Faktoren in Zähler und Nenner wegfallen werden. Speziell ist

$$(N - i k)_{(+)}^2 = 1 + \frac{K \mu}{\mu_1(\mu + i c) + K c i} = 1 + \frac{K(\mu_1 + K)}{(\mu_1 + K)(\mu_1 + i c)}$$

$$= 1 + \frac{K}{n_1^2 - n^2 - 2 p_1 n i - n \varepsilon \bar{\gamma}},$$

$$(N - i k)_{(-)}^2 = 1 + \frac{K}{n_1^2 - n^2 - 2 p_1 n i + n \varepsilon \bar{\gamma}}.$$

Das Feld ruft nur eine Störung der Dispersion hervor, es kann daher statt  $n \varepsilon \bar{\gamma}$  auch  $n_1 \varepsilon \bar{\gamma}$  gesetzt werden; die Nenner  $\mu_1 \pm n_1 \varepsilon \bar{\gamma}$  sind dann Funktionen von  $\mu_1$  mit reellen Konstanten, wie dies in der allgemeinen Theorie im Vorhinein angenommen wurde. Der Zähler  $K$  ist die früher erwähnte Dispersionskonstante. Bei sehr kleinen  $p_1/n_1$  liegen die Streifen an den Orten

$$n_l = n_1 - \frac{\varepsilon \bar{\gamma}}{2}, \quad n_r = n_1 + \frac{\varepsilon \bar{\gamma}}{2}.$$

Für den transversalen Effekt hat man

$$(N - k i)_p^2 = \frac{\mu^2 + \mu c^2}{\mu_1(\mu^2 + c^2)} = 1 + \frac{K}{\mu_1},$$

fernern

$$(N - i k)_s^2 = \frac{\mu^2 + \mu c^2}{\mu_1 \mu^2 + \mu c^2} = 1 + \frac{K \cdot (\mu_1 + K)}{\mu_1^2 + \mu_1 K + c^2} = 1 + \frac{K \cdot \mu_1 + K}{(\mu_1 - h_1)(\mu_1 - h_2)},$$

wobei

$$h_{1,2} = -\frac{K}{2} \pm \sqrt{\frac{K^2}{4} + n^2 \varepsilon^2 \bar{\gamma}^2}.$$

Den Ausdruck  $(N - i k)_s^2$  kann man in Partialbrüche zerlegen.

Ist  $K$  gegen  $2 n \varepsilon \bar{\gamma}$ , daher auch gegen  $h_{1,2}$  sehr klein, wird

$$h_{1,2} = \pm n \varepsilon \bar{\gamma}$$

und

$$(N - i k)_s^2 = 1 + \frac{K}{2} \left[ \frac{1}{n_1^2 - n^2 - 2 p_1 n i - n \varepsilon \bar{\gamma}} + \frac{1}{n_1^2 - n^2 - 2 p_1 n i + n \varepsilon \bar{\gamma}} \right].$$

Die s-Streifen liegen dann an den Orten der a-Streifen.

Die in (55), (56), (58) benutzten Symbole  $\alpha \sigma \gamma$  sind hier:

$$\alpha = \mu_1 \mu^2 + \mu c^2, \quad \sigma = \mu c K i,$$

$$\gamma = \mu_1 c^2 - \mu c^2 = -c^2 K \quad \text{und} \quad F(v) = \mu^3 + \mu c^2.$$

Wegen  $\mu = K + \mu_1$  ist die höchste  $\mu_1$ -Potenz (es ist die dritte) in  $\alpha$  enthalten. Würden also in den  $(N - ik)^2$  keine Kürzungen im Zähler und Nenner stattfinden, so gäbe es drei rechts-, drei linkszirkulare  $a$ -Streifen und ebensoviel  $s$ - und  $p$ -Streifen. Dies Beispiel illustriert die Ausführungen der allgemeinen Theorie im Abschnitte 14.

Prag, 19. März 1909.

(Eingegangen 29. März 1909.)

4. *Weiteres zur Kritik der Elektronentheorie;*  
*von Ludwig Silberstein.*

In der ersten auf diesen Gegenstand bezüglichen Abhandlung<sup>1)</sup> habe ich aus den Grundgleichungen der Elektronentheorie

$$(a) \quad \frac{\partial E}{\partial t} + X \varrho = c \cdot \operatorname{curl} M,$$

$$(\beta) \quad \frac{\partial M}{\partial t} = -c \cdot \operatorname{curl} E,$$

$$(\gamma) \quad \operatorname{div} M = 0, \quad \varrho = \operatorname{div} E$$

für die resultierende als Vektor betrachtete Geschwindigkeit  $X$  irgend eines Elementes  $d\sigma$  der Elektronenoberfläche im Zusammenhang mit den beiden Sprungvektoren  $e, m$  die dort mit (1) und (2) bezeichneten Gleichungen hergeleitet, indem ich diese Oberfläche als Sitz einer Unstetigkeit *erster Ordnung* aufgefaßt habe.

Damals versprach ich auch, Beispiele von Unstetigkeiten höherer Ordnung demnächst behandeln zu können. Seitdem habe ich nun eingesehen, daß jene Gleichungen (1), (2), die man *elektrodynamische Kompatibilitätsbedingungen* nennen kann, ungeändert auch für eine Unstetigkeit *beliebig hoher Ordnung* gelten, nur daß von Fall zu Fall die Sprungvektoren  $e, m$  verschiedene physikalische Bedeutung erhalten. Diese allgemeine Behauptung soll nun hier bewiesen werden.

§ 1. Es seien also  $e, m$  die beiden Vektoren, welche eine elektromagnetische Unstetigkeit von der  $\nu^{\text{ten}}$  Ordnung charakterisieren ( $\nu = 1, 2, \dots$ ). Hebt man die rechtwinkligen Komponenten irgend eines Vektors durch die Indizes 1, 2, 3 hervor und bezeichnet man den zur Unstetigkeitsfläche  $\sigma$  normalen Einheitsvektor mit  $n$ , die (skalare) Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit  $v$  und den Sprung irgend einer Größe  $\varphi$  durch  $[\varphi]$ , so kann man, nach dem Vorgange von Hadamard<sup>2)</sup>, die

1) L. Silberstein, Ann. d. Phys. 28. p. 308 ff. 1909.

2) J. Hadamard, Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique p. 103. Paris 1903.

identischen und die kinematischen Kompatibilitätsbedingungen für jede Komponente  $E_1, \dots, M_3$  in je eine Gleichung zusammenfassen, und zwar:

$$(1) \quad \left\{ \left[ \left[ \frac{\partial}{\partial x} \right] dx + \left[ \frac{\partial}{\partial y} \right] dy + \left[ \frac{\partial}{\partial z} \right] dz + \left[ \frac{\partial}{\partial t} \right] dt \right]^r E_1 \right. \\ = e_1 (n_1 dx + n_2 dy + n_3 dz - v dt)^r,$$

wo  $dx, dy, dz$  voneinander unabhängig sind. Von dieser Form (1) hat man drei Gleichungen für die elektrischen und ebensoviele (mit  $m_1$  anstatt  $e_1$  usw.) für die magnetischen Komponenten. Faßt man übrigens  $dx, dy, dz$  in den Vektor  $ds$  zusammen, so kann man diese sechs Formeln kürzer schreiben:

$$(1a) \quad \left\{ ds [\nabla] + dt \left[ \frac{\partial}{\partial t} \right] \right\}^r E = e (n \cdot ds - v dt)^r,$$

$$(1b) \quad \left\{ ds [\nabla] + dt \left[ \frac{\partial}{\partial t} \right] \right\}^r M = m (n \cdot ds - v dt)^r.$$

So ist z. B.

$$\left[ \frac{\partial^r E_1}{\partial x^r} \right] = n_1^r e_1, \quad \left[ \frac{\partial^r E_1}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} \right] = n_1^\alpha n_2^\beta e_1, \quad \left[ \frac{\partial^r E_1}{\partial t^r} \right] = (-v)^r e_1 \text{ usw.}$$

Um den Sinn der allgemeinen symbolischen Formeln klarzulegen, genügen diese wenigen Beispiele.

Der Voraussetzung gemäß sind nun  $E, M$  samt ihren räumlichen und zeitlichen Ableitungen bis zur  $(r-1)^{\text{ten}}$  Ordnung stetig, und erst die Ableitungen der  $r^{\text{ten}}$  Ordnung von  $E, M$  und folglich auch die  $(r-1)^{\text{ten}}$  Ableitungen von  $\varrho = \operatorname{div} E$  erleiden Sprünge an der Oberfläche  $\sigma$  des betrachteten Elektrons.

In  $(\alpha), (\beta)$  kommen nur Ableitungen erster Ordnung vor; um also die Bedingungen (1) anwenden zu können, differenziere man diese Gleichungen  $(r-1)$ mal in bezug auf irgend welche der Variablen  $x, y, z, t$ . Welche Variablen man zu diesem Behufe wählt, bleibt sich ganz gleich, da im Endresultat die betreffenden Potenzen von  $n_1, n_2, n_3$  oder  $-v$  sich beiderseitig wegheben. Um aber die Ideen zu fixieren, wählen wir z. B. die Variable  $x$  und differenzieren  $(\alpha), (\beta)$   $(r-1)$ mal in bezug auf dieselbe. Es folgt dann

$$(2) \quad -v n_1^{r-1} e = c \left[ \frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{r-1}} \operatorname{curl} M \right] - \left[ \frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{r-1}} (X \varrho) \right],$$

$$(3) \quad v n_1^{r-1} m = c \left[ \frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{r-1}} \operatorname{curl} E \right].$$

Nun ist nach den Formeln (1) oder nach (1a), wenn man bedenkt, daß  $\text{curl } = V \nabla$ :

$$\left[ \frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{r-1}} \text{curl } E \right] = n_1^{r-1} V n e,$$

wo  $V$  das Zeichen des Vektorproduktes bedeutet, und ebenso nach (1b):

$$\left[ \frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{r-1}} \text{curl } M \right] = n_1^{r-1} V n m.$$

Man erhält also aus (3) ohne weiteres

$$(3') \quad v m = c V n e,$$

d. h. genau dieselbe Bedingung, welche l. c. mit (2) bezeichnet wurde.

Ferner hat man aus der obigen Gleichung (2) zunächst

$$(2') \quad v e + V c n m = \left[ \frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{r-1}} (X \varrho) \right] \cdot n_1^{1-r}.$$

Es erübrigत also nur noch den rechts stehenden Sprung mittels (1) durch  $e$ ,  $n$  auszudrücken. Nun sind, der Voraussetzung nach,  $\varrho$  selbst und seine  $r-2$  ersten Ableitungen stetig, und da sie außerhalb des Elektrons verschwinden, so verschwinden sie auch dicht an der Innenseite der Elektronoberfläche. Die rechte Seite von (2') wird also gleich

$$\left[ X \frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{r-1}} \varrho \right] \cdot n_1^{1-r},$$

oder, da außerhalb des Elektrons sämtliche, also auch die  $(r-1)^{\text{te}}$  Ableitung von  $\varrho$  verschwinden, gleich

$$n_1^{1-r} X \left[ \frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{r-1}} \varrho \right] = n_1^{1-r} X \left[ \frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{r-1}} \text{div } E \right],$$

d. h. nach (1), gleich

$$X(n e),$$

wo nunmehr  $X$  den Wert von  $X$  dicht an der Innenseite der Oberfläche bedeutet, also kurz die Geschwindigkeit eines Oberflächenpunktes des Elektrons sein wird, während  $n e$  das skalare Produkt von  $n$ ,  $e$  oder einfach die Normalkomponente von  $e$  ist. Führt man diesen Wert in (2') ein, und schreibt der Vollständigkeit wegen die Gleichung (3') noch einmal, so hat man also, genau wie für eine Unstetigkeit erster Ordnung, die beiden

elektrodynamischen Kompatibilitätsbedingungen für die als Unstetigkeitsfläche von beliebiger Ordnung  $\nu \geq 1$  aufgefaßte Elektronenoberfläche:

$$(I) \quad (\nu n) X = v e + c V n m,$$

$$(II) \quad v m = c V n e,$$

was wir eben beweisen wollten.

Die physikalische Bedeutung der beiden Sprungvektoren  $e, m$  kann man bei jedem gegebenen  $\nu$  ohne weiteres aus den Formeln (I) oder (Ia, b) herleiten. Es genügt, hierfür zwei Beispiele anzudeuten. Für  $\nu = 1$  hat man

$$(4) \quad \begin{cases} V n e = [\operatorname{curl} E], & n e = [\varrho], \\ & V n m = [\operatorname{curl} M], \\ & n m = [\operatorname{div} M] = 0, \end{cases}$$

was ich schon früher benutzt habe; dadurch ist auch die Bedeutung von  $e, m$  in diesem Falle klargelegt. Für  $\nu = 2$  erhält man ohne weiteres wegen  $n^2 = 1$ :

(5)  $e = [\nabla^2 E] = [\nabla \varrho - \operatorname{curl}^2 E], \quad m = [\nabla^2 M] = -[\operatorname{curl}^2 M]$ , wodurch die Bedeutung von  $e, m$  unmittelbar gegeben ist. Ähnliche Formeln für  $\nu = 3, 4$  usw. wird der Leser selbst sofort hinschreiben können.

Von der jedesmaligen Bedeutung der Vektoren  $e, m$  abgesehen, gelten jedoch für ein beliebiges  $\nu > 1$  dieselben Bedingungen (I), (II), wie für  $\nu = 1$ . Wie früher kann man aus (I), (II) etwa  $m$  eliminieren und erhält:

$$(III) \quad X = \frac{v^2 - c^2}{v(e n)} e + \frac{c^2}{v} n;$$

aus (I) hat man übrigens  $X n = v$ , wie es sein muß; aus (II) folgt unmittelbar der Wert der Normalkomponente der Geschwindigkeit:

$$(IV) \quad v = \frac{c}{m^2} \cdot n V e m.$$

Ist also die Elektronenoberfläche der Sitz von Unstetigkeiten von noch so hoher Ordnung (indem an ihr  $\varrho$  selbst, oder etwa  $\nabla \varrho$  oder  $\nabla^2 \varrho$  usw. einen Sprung erleidet), so ist die augenblickliche Geschwindigkeit  $X$  eines jeden Punktes dieser Oberfläche durch die gleichzeitigen Beträge und Richtungen der Sprungvektoren vollständig bestimmt. Es läßt sich also bei gegebenem Anfangszustande  $E_0, M_0$  die Bewegung des Elektrons nicht will-

kürlich vorschreiben, sogar wenn man noch *keine dynamischen Überlegungen einführt*.

Übrigens gelten hier sämtliche Bemerkungen, die wir l. c. für  $v = 1$  gemacht haben.

Man könnte erwidern, daß ja keine Kompatibilität zu bestehen braucht und daß sich also der transversale Teil der Unstetigkeit von dem longitudinalen ablösen kann. Desto schlimmer für die Elektronentheorie; denn alsdann würde an der Elektronoberfläche der longitudinale (d. h. durch die Normalkomponente von  $e$  gegebene) Teil der Unstetigkeit allein zurückbleiben; demgemäß würde aber nach (III) die *ganze Geschwindigkeit eines jeden Punktes der Elektronoberfläche* rein *normal* sein, d. h. es könnte dann das Elektron nur ruhen oder nach allen Seiten hin normal zu sich selbst anschwellen.

§ 2. Ein Beispiel zur Bedingung (III). — Man wird zwar auch ohne Spezialrechnung einsehen, daß wegen (I) und (II) oder (III), namentlich wenn man sich nicht auf stationäre Zustände beschränkt, die *Beweglichkeit* eines mit irgend einer Unstetigkeit dauernd behafteten Elektrons *als eines Ganzen* im allgemeinen verhindert sein wird. Doch will ich hierfür an dieser Stelle wenigstens ein einziges eklatantes Beispiel geben.

Verlangen wir, daß ein etwa kugelförmiges Elektron mit *homogener Volumladung* sich als ein Ganzes translatorisch mit *Überlichtgeschwindigkeit* ( $\bar{X} > c$ ) bewege.<sup>1)</sup> In diesem Falle ist die Unstetigkeit von der ersten Ordnung, so daß  $en = [\rho] = -\rho$ ; bezeichnet man also den Winkel  $X, n$  mit  $\theta$ , so daß speziell für ein kugelförmiges Elektron  $\theta$  einfach die Poldistanz sein wird, so kann man anstatt (III) schreiben:

$$(6) \quad X = \frac{c^2 - \bar{X}^2 \cos^2 \theta}{v \rho} e + \frac{c^2}{v} n,$$

$$v = \bar{X} \cdot \cos \theta.$$

1) Bekanntlich ergab sich sowohl aus den Abrahamschen wie auch Sommerfeldschen Untersuchungen, daß eine gleichförmige Bewegung eines solchen (und namentlich *starren*) Elektrons mit Überlichtgeschwindigkeit zwar nicht kräftefrei ist, daß aber die erforderliche äußere Kraft einen endlichen Betrag hat, „so daß Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit bei Volumladung physikalisch denkbar ist“.

Da nun  $\bar{X} > c$ , so wird es zwei ganze Zonen geben

$$\theta_1 = \arccos\left(\frac{c}{\bar{X}}\right) \quad \text{und} \quad \theta_2 = \pi - \theta_1,$$

für deren Punkte das erste Glied in dem Ausdruck für  $X$ , wegen der Endlichkeit von  $c$ , fortfällt und nur

$$X = \pm c \cdot n$$

allein stehen bleibt. Die Flächenelemente dieser beiden Zonen (oder genauer, die Punkte der beiden Parallelkreise  $\theta_1, \theta_2$ ) würden sich also gänzlich radial oder normal zu sich selbst bewegen, was bei der postulierten Translation des ganzen Elektrons in der  $X$ -Richtung offenbar absurd ist. Anstatt sich so fortzubewegen, würde sich das Elektron in der heftigsten Weise verzerren, indem die genannten Zonen mit Lichtgeschwindigkeit radial fortfliegen würden.

Man könnte noch erwidern, daß, ungeachtet  $c^2 = X^2 \cos^2 \theta$ , das erste Glied in (6) doch nicht verschwinde, indem gerade in diesen Oberflächenpunkten  $c = \infty$  wird. Doch ist wegen (4) die Normalkomponente, als Sprung der Dichte  $\rho$ , sicher endlich; es könnte also nur die Tangentialkomponente von  $c$  unendlich werden; alsdann würde aber  $[\operatorname{curl} E] = \infty$  und es müßte wenigstens an einer Seite der Oberfläche  $\operatorname{curl} E$  selbst, folglich auch  $\partial M / \partial t$  einen unendlich großen Betrag haben, was ebenfalls unzulässig ist.

§ 3. *Unstetigkeiten von unendlich hoher Ordnung.* — Um sich von den Kompatibilitätsbedingungen und den aus ihnen fließenden Schwierigkeiten zu befreien, müßte man sich also die Ladung in einem Elektron so verteilt denken, daß nicht nur  $\rho$  selbst, sondern auch alle seine Ableitungen von irgend einer erreichbar hohen Ordnung an der Oberfläche  $\sigma$  des Elektrons stetig bleiben. Da nun alle diese Größen an der Außenseite von  $\sigma$  verschwinden, so müßten sie auch dicht an der Innenseite sämtlich gleich Null sein; eine solche Verteilung ließe sich also nur durch eine Funktion  $\rho(x, y, z)$  ausdrücken, die wenigstens an  $\sigma$ , nach innen zu, nicht analytisch mit noch so kleinen Konvergenzbereichen, oder in Hrn. Mérays<sup>1)</sup> Termino-

1) Ch. Méray, *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale* I, p. 110. Paris 1894.

logie, nicht *holotrop mit noch so kleinen Holometern* sein dürfte. Abgesehen von rechnerischen Schwierigkeiten hätte man nun keinen Grund, solche nicht holotrope Funktionen auszuschließen, und die ihnen entsprechende Verteilung der Ladung in einem begrenzten Elektron wäre wohl physikalisch zulässig.<sup>1)</sup>

Dies allein würde jedoch noch nicht genügen. Denn, wie Hadamard (l. c. Art. 76) vorausgesehen hat, könnte die Unstetigkeit von „unendlich hoher“ *Ordnung* sein und hätte man alsdann immer noch gewisse identische und kinematische Bedingungen zu befriedigen; sobald nur  $\varrho$  (oder irgend eine andere elektromagnetische Größe) auf der einen Seite der Elektronoberfläche *keine analytische Fortsetzung* der betreffenden für die andere Seite gültigen Funktion bildet, wird man sicher solche Bedingungen zu berücksichtigen haben.<sup>2)</sup> Diese Bedingungen, welche an Stelle von (I), (II) treten würden, falls (bei gewahrter Stetigkeit aller Ableitungen) die Oberfläche des Elektrons der Sitz derartiger Singularitäten wäre, bin ich nicht imstande zu entwickeln; der betreffende Gegenstand ist nach seiner rein mathematischen Seite bis jetzt noch gar nicht in Angriff genommen worden.<sup>3)</sup>

---

Ein mögliches, radikales Mittel, die Theorie von solchen Bedingungen ganz zu befreien, wäre vielleicht die Annahme eines räumlich unbegrenzten Elektrons etwa mit exponentieller Ladungsverteilung, wie ich dies früher schon (l. c.) kurz erwähnt habe. Auf diesen Gegenstand ging ich damals nicht ein, indem es mir zweifelhaft schien, ob die Vertreter der Elektronentheorie zu einer solchen Annahme Zuflucht nehmen

1) In meiner ersten Abhandlung habe ich offenbar nur durchweg holotrope Funktionen im Sinne gehabt, als ich sagte, es wäre die vollkommene Stetigkeit mit den *endlichen Dimensionen* des Elektrons unvereinbar.

2) Beispielshalber setze man etwa für ein kugelförmiges Elektron vom Radius  $r = a$ :

$$\varrho = 0 \text{ für } r \geq a, \quad \varrho = b e^{\frac{a}{r-a}} \text{ für } r \leq a,$$

wo  $b = \text{konst.}$

3) Wenigstens schließt Hadamard (Art. 76) mit den Worten: „L'étude des discontinuités de cette nature offre des difficultés particulières. Nous ne l'aborderons pas dans ce qui va suivre.“

wollten. Doch ist vielleicht eine Untersuchung dieses Falles, der bei näherer Betrachtung keineswegs so extravagant ist, nicht ganz der Mühe unwert, und er soll deshalb hier noch, zum Schluß, in aller Kürze behandelt werden.

§ 4. Die elektromagnetischen Massen eines unbegrenzten (deformierbaren) Elektrons mit exponentieller Ladung. — Im Ruhezustand sei

$$(7) \quad \varrho = \varrho_0 e^{-r/\lambda},$$

wo  $\lambda = \text{konst.}$  und  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  die Entfernung vom Mittelpunkte  $O$  des Elektrons ist, wo die Dichte  $\varrho_0$  herrscht; die Gesamtladung wird dann

$$(8) \quad Q = 4\pi \varrho_0 \int_0^\infty r^3 e^{-r/\lambda} dr = 8\pi \lambda^3 \varrho_0.$$

Im Bewegungszustand soll sich das Elektron, wie wir *beispielsweise* annehmen wollen, nach Lorentzscher Art deformieren, so daß die Kugeln konstanter Dichte zu abgeplatteten Ellipsoiden werden. Bewegt sich das Ganze mit konstanter Geschwindigkeit  $v < c$  in der  $x$ -Richtung und schreibt man  $\sqrt{1 - v^2/c^2} = \kappa$ , so werden die Halbachsen dieser Ellipsoide im Raum  $S(x, y, z)$ :

$$\kappa r, \quad r, \quad r;$$

im Hilfsraume  $S'$ :  $x' = x/\kappa$ ,  $y' = y$ ,  $z' = z$  werden sie also wieder kugelförmig. Hiernach erhält man ohne weiteres für das skalare Potential  $\varphi$  und das Vektorpotential  $A$ :

$$(9) \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi\kappa r'} \left\{ 1 - e^{-r'/\lambda} \left( 1 + \frac{r'}{2\lambda} \right) \right\},$$

$$(10) \quad A = \frac{v}{c} i \cdot \varphi,$$

wo  $r' = \sqrt{(x/\kappa)^2 + y^2 + z^2}$  ist und  $i$  einen Einheitsvektor in der Bewegungsrichtung bedeutet. In Entfernungen, die im Vergleich mit  $\lambda$  sehr groß sind, reduziert sich (9) auf die bekannte Form  $\varphi = Q/4\pi\kappa r'$ . Im Mittelpunkt selbst ist  $\varphi$  durchaus endlich, nämlich  $\varphi_0 = Q/8\pi\lambda\kappa$ .

Für die Kräfte  $E = -\nabla\varphi - \partial A/c \partial t$ ,  $M = \text{curl } A$  hat man

$$E = -\frac{1}{r'} \frac{d\varphi}{dr'} r, \quad M = \frac{v}{c} \frac{1}{r'} \frac{d\varphi}{dr'} (jz - ky),$$

wo  $\mathbf{r} = ix + jy + kz$  der Radialvektor (im Raum  $S$ ) ist und wo die Einheitsvektoren  $i, j, k$  ein rechtshändiges System bilden. Daraus folgt die elektromagnetische Bewegungsgröße

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{c} \int V E M d\tau = i \cdot \frac{v}{c^2} \int \frac{s^2}{r^2} \left( \frac{d\varphi}{dr'} \right)^2 d\tau = i \cdot G,$$

wo die Integrale über den ganzen Raum  $S$  zu nehmen sind und wo  $s$  die Entfernung eines Punktes von der  $x$ -Achse bedeutet;  $G$  ist der absolute Wert des Vektors  $\mathfrak{G}$ . Indem man vom Hilfsraum  $S'$  Gebrauch macht und die Integrationen nach den Winkeln ausführt, kann man für  $G$  schreiben:

$$G = \frac{8\pi}{3} \frac{v \times}{c^4} \int_0^\infty r'^2 \left( \frac{d\varphi}{dr'} \right)^2 dr'$$

und durch Substitution von (9), wenn  $r'/\lambda = -u$  gesetzt wird:

$$G = \frac{Q^2 v}{6\pi c^2 \lambda \times} \int_{-\infty}^0 \{1 - (1 - u + \frac{1}{2}u^2)e^u\}^2 \frac{du}{u^2}.$$

Der Wert des Integrals ergibt sich leicht zu  $\frac{9}{32}$ , so daß schließlich

$$(11) \quad G = \frac{3}{64\pi} \frac{Q^2}{\lambda} \frac{v}{c^2 \times}$$

wird. Hieraus folgen die beiden *elektromagnetischen* Massen, die longitudinale  $m_l$  durch Differentiation nach  $v$ , die transversale  $m_t$  durch Division mit  $v$ :

$$(12) \quad \begin{cases} m_l = \frac{3}{64\pi} \frac{Q^2}{c^2 \lambda} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3}}, \\ m_t = \frac{3}{64\pi} \frac{Q^2}{c^2 \lambda} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{cases}$$

Die Abhängigkeit der Massen von der Geschwindigkeit ist also, wie vielleicht zu erwarten war, genau dieselbe wie für das begrenzte Lorentzsche Elektron, wird also ebensogut mit den Experimenten übereinstimmen.

Für *langsame* Bewegung folgt aus (12)  $m_t = m_t = m_0$ :

$$(13) \quad m_0 = \frac{3}{64 \pi} \frac{Q^4}{c^8 \lambda};$$

hierin ist die Bedeutung von  $\lambda$  aus  $\varrho = \varrho_0 e^{-r/\lambda}$  zu ersehen.

Für das Lorentzsche Elektron (mit homogener Volumeladung) vom Radius  $R$  ist:

$$m_0 = \frac{Q^2}{5 \pi c^8 R}.$$

Was also die Masse  $m_0$  und allgemein auch  $m_t$ ,  $m_t$  anbelangt, würde sich unser unbegrenztes Elektron genau so verhalten wie ein Lorentzsches vom Radius

$$R = \frac{64}{15} \lambda.$$

(Bei Flächenladung würde das Verhältnis von  $R$  zu  $\lambda$  gleich  $32/9$ )

Führt man die oft benutzten Zahlenwerte von  $Q$  und  $Q/m_0$  in (13) ein, so ergibt sich die Größenordnung von  $\lambda$ , d. h. derjenigen Entfernung von  $O$ , in welcher die Dichte auf ihren  $e^{ten}$  Teil sinkt, zu  $10^{-14}$  cm. Hiernach lässt sich auch wegen (8) der Wert von  $\varrho_0 = Q/8\pi\lambda^3$  schätzen. Wollte man bei gleichbleibendem Wert von  $Q$  eine größere Masse erzielen (wie etwa für die „positiven Elektronen“ im Vergleich mit den eigentlichen oder negativen „Elektronen“), so brauchte man bloß ein kleineres  $\lambda$  und entsprechend größeres  $\varrho_0$  vorauszusetzen.

In ähnlicher Weise könnte man unbegrenzte, also von den Kompatibilitätsbedingungen befreite Elektronen mit Buchererscher Deformabilität oder Abrahamscher Starrheit der Flächen  $\varrho = \text{konst.}$  behandeln; eine Deformation nach Lorentzscher Art wurde oben nicht etwa aus physikalischen Gründen, sondern einstweilen *nur deshalb* gewählt, weil sich dabei die Rechnungen am einfachsten gestalten.

Rom, im März 1909.

(Eingegangen 2. April 1909.)

5. Bestimmung der optischen Konstanten einiger  
flüssiger Kristalle;  
von E. Dorn und W. Lohmann.

Über die optischen Konstanten flüssiger Kristalle liegen nur wenige und ziemlich rohe Messungen vor. O. Lehmann<sup>1)</sup> erhielt für Paraazoxyphenetol durch Suspension in einer gleich stark brechenden Flüssigkeit als Werte der Hauptbrechungskoeffizienten  $n_1 = 1,8$ ,  $n_2 = 1,5$ ; ferner ermittelte er<sup>2)</sup> aus den Durchmessern Newtonscher Ringe im parallelen polarisierten Licht für denselben Körper und einige andere (Cholesterylbenzoat, Paraazoxybensoesäureäthylester, Paraazoxyanisol) die Differenz  $n_1 - n_2$ . E. Sommerfeldt<sup>3)</sup> fand aus den Ringen im konvergenten Licht zwischen gekreuzten Nicols die Doppelbrechung bei Ammonium oleinicum und Gemischen mit Kalium oleinicum ungefähr ebenso groß wie bei den Feldspaten.

Es ist nun D. Vorländer in Halle (gemeinsam mit W. Kasten<sup>4)</sup>) gelungen, neue kristallinische Flüssigkeiten aufzufinden, welche *wie Wasser klar* und *durchsichtig* sind und auf einer oder zwischen zwei Glasplatten ausgebreitet im konvergenten polarisierten Licht Ringsysteme mit dunklem Kreuz zeigen, ebenso schön wie eine dünne Kalkspatplatte.

Wie Hr. Vorländer a. a. O. hervorhebt, ist hierdurch den „Emulsionstheorien“ der kristallinischen Flüssigkeiten jeder Boden entzogen.

Das Verhalten der neuen Substanzen berechtigte zu der Erwartung, daß für sie eine genauere Bestimmung der optischen

1) O. Lehmann, Ann. d. Phys. 2. p. 661. 1900.

2) O. Lehmann, Ann. d. Phys. 18. p. 796. 1905.

3) E. Sommerfeldt, Physik. Zeitschr. 9. p. 234. 1908. Die Anregung zu diesen Messungen geben die qualitativen Versuche von Vorländer mit anderen Substanzen.

4) D. Vorländer, Ber. d. Deutsch. chem. Ges. 31. p. 2033. 1908.

Konstanten gelingen müsse. Bis zur Erreichung dieses Ziels waren freilich noch erhebliche Schwierigkeiten zu überwinden.

Die Ausführung der Untersuchung wurde nur dadurch ermöglicht, daß uns Hr. Vorländer das erforderliche Material zur Verfügung stellte. Wir sprechen ihm dafür auch an dieser Stelle unseren Dank aus.

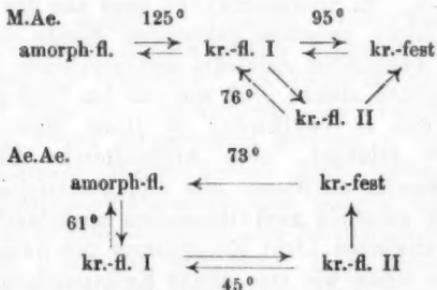
Die behandelten Substanzen sind Äthoxybenzalamino- $\alpha$ -Methylzimtsäureäthylester und Äthoxybenzalamino- $\alpha$ -Äthylzimtsäureäthyläster; sie sollen kurz mit M.Ae. und Ae.Ae. bezeichnet werden.

Die Eigenschaften gibt Hr. Vorländer<sup>1)</sup> wie folgt an.

M.Ae.: 1 enantiotrop<sup>2)</sup> kristallinisch-flüssige und 1 monotrop<sup>3)</sup> kr.-fl. Phase, beide pseudoisotrop<sup>4)</sup>, 2 feste Phasen. Andeutung einer 3 kr.-fl. Form. Übergangspunkte 124°, 94° und 76°.

Ae.Ae.: 2 monotrop kr.-fl. Phasen, beide pseudoisotrop. Übergangspunkte 73°, 61° und 45°, 2 feste Phasen.

Die Umwandlungen lassen sich übersichtlich so darstellen<sup>4)</sup>:



Eine genauere Beschreibung der Erscheinungen bei dünnen Schichten zwischen Glasplatten im konvergenten polarisierten Licht findet sich bei Vorländer a. a. O. p. 2048 ff.; einstweilen sei nur hervorgehoben, daß die Substanzen sich normal

1) l. c. p. 2039.

2) O. Lehmann, Molekularphysik I. p. 119. 1888.

3) D. h. eine dünne Schicht zwischen Glasplatten erscheint im parallelen Licht bei gekreuzten Nicols dunkel; erst im konvergenten Licht treten Ringe auf.

4) Nach Vorländer l. c. p. 2046.

wie positive optisch *einachsige Kristalle* verhalten, deren Achse senkrecht zur *Glasfläche* steht.

Die Untersuchung zerfiel in zwei Teile:

I. Bestimmung des Brechungskoeffizienten für die isotrope Phase und den ordentlichen Strahl der kristallinisch-flüssigen Phasen.

II. Ermittlung des außerordentlichen Hauptbrechungskoeffizienten aus den Ringen im konvergenten polarisierten Licht.

Der Plan der Untersuchung war von D. entworfen, der dann mit L. die ersten erfolgreichen Versuche für Teil I ausführte. L. machte die ersten Ringmessungen insbesondere für verschiedenfarbiges Licht, D. später genauere für Na-Licht. Die vorliegende Mitteilung ist von D. verfaßt. Hr. Dr. W. Hartmann und Hr. cand. phil. Erhardt Lehmann haben uns durch zahlreiche Kontrollmessungen und Erledigung eines großen Teiles der recht mühsamen Rechnungen unterstützt.

### I.

Da die kristallinischen Flüssigkeiten nur in dünnen Schichten — am besten zwischen parallelen Glasflächen — die Eigenschaften einachsiger Kristalle zeigen, so waren sämtliche *Prismenmethoden* von vornherein ausgeschlossen.

Indem wir die vergeblichen Versuche mit Totalreflexion und einem heizbaren Abbeschen Refraktometer<sup>1)</sup>, sowie die stufenweise Entwicklung der schließlich gebrauchten Vorrichtung übergehen, beschreiben wir sofort deren endgültige Form.

Der *optische Teil* bestand aus zwei gleichen rechtwinkligen Prismen von stark brechendem Glase, zwischen deren Hypotenusenflächen sich die zu untersuchende Substanz in dünner Schicht befand. Die zusammengesetzten Prismen wurden in den Heizapparat (vgl. unten) gebracht und dieser auf dem Tischchen eines Spektrometers befestigt, dessen Kollimator abgeschraubt war. Ist der Brechungskoeffizient des Glases

---

1) Dies Instrument hätte auch die für M.Ae. erforderlichen hohen Temperaturen nicht ertragen.

höher als derjenige der Substanz, so findet man mit homogenem Licht eine Stellung, in welcher ein Teil des Gesichtsfeldes hell, der andere dunkel erscheint<sup>1)</sup>, und kann das Fadenkreuz des Fernrohres auf die Grenze der beiden Teile einstellen. Dann dreht man das Fernrohr, bis das Fadenkreuz an der letzten Prismenfläche auf sich selbst zurückgespiegelt wird. Aus dem

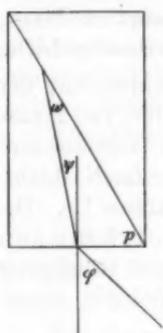


Fig. 1.

Winkel  $\varphi$  zwischen diesen Richtungen, dem Prismenwinkel  $p$  und dem Brechungskoeffizienten des Glases  $N$  ergibt sich derjenige der Substanz ( $n$ ) wie folgt (vgl. Fig. 1). Es ist

$$(1) \quad \sin \psi = \frac{\sin \varphi}{N},$$

$$(2) \quad \tilde{\omega} = \frac{\pi}{2} - \psi - p^2,$$

$$(3) \quad n = N \cos \tilde{\omega}.$$

Denn in der Schicht verläuft der Grenzstrahl streifend.

Der Teilkreis des Spektrometers gab Minuten, was für die vorliegende Aufgabe vollkommen ausreicht; der Prismenwinkel  $p$  und der Brechungskoeffizient  $N$  wurden mit einem größeren Instrument bestimmt, welches Ablesung auf  $10''$  gestattete.

Aus dem Brechungskoeffizienten für Zimmertemperatur wurden die Werte für höhere Temperaturen unter Benutzung der Arbeit von Reed<sup>3)</sup> hergeleitet. Das Glas „O 165“ unseres ersten Prismas  $A$  findet sich unter den dort behandelten (vgl. p. 728 und die Figur p. 730); beim zweiten Prisma  $B$  wurde die Reduktion nach der ähnlichsten Sorte „S 163“ (vgl. Figur p. 730) berechnet.

Die nachstehenden Tafelchen enthalten den Prismenwinkel  $p$  und die Brechungskoeffizienten für die benutzten Lichtarten ( $\lambda$  in Å.-E.).

1) Die im hellen Teil auftretenden *Interferenzstreifen* stören selten, am ersten noch bei den brechbarsten Strahlen.

2) In  $B$  liegt der Strahl auf der anderen Seite der Normale, daher ist hier in der Formel für  $\tilde{\omega}$  das Zeichen von  $\psi$  zu ändern.

3) J. O. Reed, Wied. Ann. 65. p. 707. 1898.

Prisma A.  $p = 44^\circ 59' 45''$ .

Temperatur	Li $\lambda = 6708$	Na 5893	Hg grün 5461	Hg blau 4357
20	1,7461	1,7551	1,7618	1,7914
40	62	52	20	16
60	64	54	21	19
80	65	56	23	21
100	67	58	25	24
120	68	59	27	27
140	70	61	29	31

Prisma B.  $p = 60^\circ 2' 15''$ .

Temperatur	Li 6708	Na 5893	Hg grün 5461	Hg blau 4357
20	1,8927	1,9069	1,9167	1,9633
40	29	72	70	37
60	31	74	73	41
80	34	77	77	46
100	37	80	80	50
120	39	83	83	55
140	42	86	86	60

Die Vorderfläche beider Prismen war ein Quadrat von 1 cm Seitenlänge; die zusammengesetzten Prismen bildeten rechtwinklige Parallelepipeda der Tiefe 1 cm bzw. 1,73 cm.

Für jedes der Doppelprismen war eine *Heizvorrichtung* aus starkem Kupfer gearbeitet, welche für die Beobachtungen mit kleinen Schraubzwingen auf dem Spektrometertisch befestigt wurde. Fig. 2 und 2a stellen Grundriß und Seitenansicht in  $\frac{2}{3}$  der natürlichen Größe für Prisma B dar. *N* ist ein 2 mm starkes Neusilberblech, *As* eine wärmeisolierende Asbestschicht von 0,5 mm. *K*<sub>1</sub> ist die 9 mm starke kupferne Grundplatte, *K*<sub>2</sub> die gleich dicke (mit einem nicht gezeichneten, zum Abheben dienenden Neusilberstift versehene) Deckplatte. Beide tragen seitliche Kupferstäbe *S*<sub>1</sub> und *S*<sub>2</sub> von 9 mm Durchmesser und 38 mm Länge; *S*<sub>2</sub> kann durch Abschrauben des äußeren

Teiles auf die halbe Länge verkürzt werden.  $KK$  sind die Seitenwände des Raumes für das Prisma; sie verjüngen sich nach vorn und hinten, um den Durchblick  $DD$  frei zu lassen.  $DD$  kann durch vorgesetzte mikroskopische Deckgläser geschlossen werden, deren vorderes zur Einstellung auf die

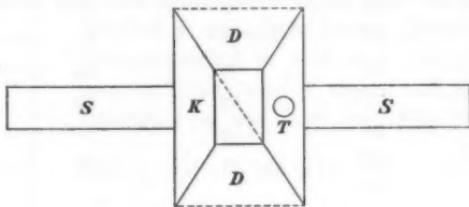


Fig. 2.

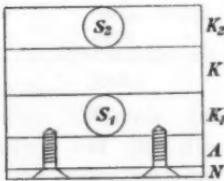


Fig. 2a.

Prismennormale entfernt wurde. In  $T$  kann ein dünnes Thermometer eingeführt werden.

Die Einrichtung für Prisma  $A$  war entsprechend kürzer und die Seitenwände ein wenig schwächer. Zum Verschluß von  $DD$  dienten hier geeignet gefäßte Glimmerstücke.

Zur Heizung ließ man die Enden der Stäbe von den Flammen kleiner Bunsenbrenner bespülen; nach Entfernung derselben durchlief das Prisma abnehmende Temperaturen. Andererseits konnten über die Kupferstäbe elektrische Öfchen (Nickeldraht auf Glasröhren mit Asbestbedeckung) überschoben werden. Diese wurden besonders zur Erzeugung konstanter Temperaturen benutzt.

Auf die Bestimmung der *wirklichen Temperatur der Prismen* wurde große Sorgfalt verwendet.

Die beiden benutzten Thermometer wurden auf ein in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt berichtigtes Thermo-

meter bezogen; trotz der guten Wärmeleitung des Kupfers blieb es aber immerhin fraglich, inwieweit die — wegen des herausragenden Fadens korrigierten — Angaben der Thermometer der Temperatur im Innern der Prismen entsprachen.

Daher wurde folgendermaßen verfahren. Die Lötstelle Eisen-Konstantan eines dünndrähtigen Thermoelementes tauchte mit dem Normalthermometer in ein elektrisch geheiztes Ölbad, die Lötstellen Eisen-Kupfer und Konstantan-Kupfer in kleine von Eis umgebene Petroleumbäder. Die Kupferdrähte führten zu einem Siemensschen Millivoltmeter, dessen Angaben für geeignete Temperaturen abgelesen wurden.

Nachdem so das Thermoelement graduiert war, wurden aus Spiegelglas parallelepipedische Stücke gleicher Gestalt wie die Doppelprismen gefertigt und mit einer bis zur Mitte reichenden Bohrung versehen. Während die Glasstücke in den Heizkörpern steckten, wurde das Thermoelement eingeführt und der geringe Zwischenraum noch mit verriebenem angefeuchtetem Asbest ausgefüllt, der bald trocknete.

Es wurden die Angaben des im Heizkörper sitzenden Thermometers mit denen der thermoelektrischen Vorrichtung verglichen, und zwar für alle Arten der Erwärmung, welche bei den Hauptbeobachtungen vorkamen: Flammenerwärmung mit folgender Abkühlung, elektrische Heizung mit folgender Abkühlung oder auf konstante Temperatur.

Die Differenzen waren für den größeren Apparat (Prisma B) überraschend gering.

Kühlte sich z. B. der bis  $170^{\circ}$  erwärmte Apparat mit vorgesetzten Deckgläsern ab, so erreichte die Differenz in dem Intervall  $150$  bis  $30^{\circ}$  nur einmal  $1,0^{\circ}$ ; bei stationärer Heizung blieb die Reduktion auf das Thermoelement bis  $100^{\circ}$  unter  $1^{\circ}$  und erreichte bei  $140^{\circ}$  den Wert  $-1,8^{\circ}$ .

Der kleine Apparat (A) wies etwas größere Differenzen auf, bei  $116^{\circ}$ :  $-1,8$ ; bei  $132^{\circ}$ :  $-4,5^{\circ}$  bei Abkühlung nach vorangegangener Erwärmung mit Flammen.

Übrigens liegen die wichtigsten Beobachtungen bei verhältnismäßig niedrigen Temperaturen, wo die Korrekturen naturgemäß gering sind.

Als Lichtquellen dienten für Rot und Gelb Lithium und Natrium in der Flamme eines kräftigen Terquembrenners, für

Grün und Blau eine Quecksilberbogenlampe in Quarzglas von Heraeus. Lichtfilter (für Rot und Blau von der „Neuen Photographischen Gesellschaft Steglitz-Berlin“, für Grün ein Trop mit einer Mischung von Didymchlorür und Kalibichromat) beseitigten die anderen Lichtgattungen ausreichend.

Die Beobachtungen der *isotropen* Phase machten keine Schwierigkeit, aber bei den *flüssig-kristallinischen* trat die dem streifenden Strahl entsprechende Grenze erst sichtbar hervor, als das *einfallende Licht nach der Einfallsebene* durch ein großes Nicolprisma polarisiert war. Auch nachdem wir mit den Erscheinungen vertraut geworden waren, vermochten wir bei Gelb und Grün nur in seltenen Fällen auch ohne Nicol eine Andeutung zu erkennen, bei Rot und Blau nie.

Fiel senkrecht zur Einfallsebene polarisiertes Licht ein, so war die Grenze nie kenntlich; dies deutet schon darauf hin, daß der außerordentliche Strahl einen sehr hohen Hauptbrechungskoeffizienten hat, welcher dem des Prismas *B* nahe liegt. Die Ringbeobachtungen zwischen gekreuzten Nicols bestätigten dies. Das gelbliche Glas des Prismas absorbierte das Blau stark, daher waren die Beobachtungen hier durch Lichtschwäche erschwert.

Meistens wurde mit der Flamme erwärmt; ein Beobachter stellte in angemessenen Zwischenräumen das Fadenkreuz auf die bei der Abkühlung wandernde Grenze zwischen hell und dunkel ein, ein Gehilfe las auf ein Zeichen die Temperatur für den Augenblick der Einstellung ab. Die Normale der Austrittsfläche wurde vor der Erwärmung und nach der Abkühlung anvisiert.

Durch graphische Interpolation wurden zu geeigneten, meist um  $5^{\circ}$  auseinanderliegenden Temperaturen die zugehörigen Winkel ( $\psi$ ) ermittelt und zur Berechnung der Brechungskoeffizienten nach den Formeln (1), (2), (3) verwendet. Die zeitraubendere elektrische Heizung auf konstante (bzw. in engen Grenzen schwankende) Temperatur führte auf merklich gleiche Werte.

An den Übergangspunkten waren für ein Temperaturintervall von einigen Graden Ablesungen nicht möglich.

Es folgt nun eine Zusammenstellung der Ergebnisse (vgl. Tab. I p. 542—543).

Eine Übersicht gibt Fig. 3.

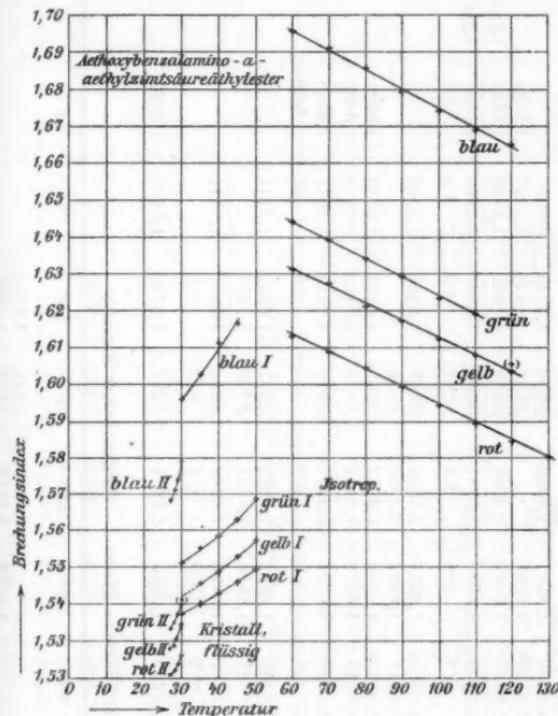


Fig. 3.

Die Umwandlung trat nicht in den von Vorländer angegebenen Punkten  $73^\circ$  und  $45^\circ$  ein. Vielmehr konnte die isotrope Phase bis  $57$  bzw.  $55^\circ$  verfolgt werden, dann wurde die Erscheinung undeutlich und ließ eine Beobachtung der ersten kristallinisch flüssigen Phase von etwa  $50^\circ$  (in einem Falle von  $56^\circ$ ) an zu.

Erwähnt sei, daß Hr. Dr. Dickenschied im hiesigen Institut auch eine Diskontinuität der Dichte bei etwa  $54^\circ$  fand.

Die Abweichungen von den Angaben Vorländers werden dadurch verständlich, daß wir mit sinkender Temperatur beobachteten, wobei Unterkühlung zu erwarten ist, deren Auftreten durch die geringe Dicke der Schicht noch begünstigt sein wird.

*Δ-hydroxybenzoxolamino-α-äthylklorinsäureäthylester.*

Tabelle I.

	Datum	Prisma	Heizung	Brechungsindex. Isotrope Phase.						130°
				60°	70°	80°	90°	100°	110°	
Li rot	9./4.	A	Fl.)	1,6140	1,6093	1,6044	1,5995	1,5945	1,5895	1,5849 1,5845 1,5847
	13./4.	A	El. s)	1,6137	1,6091	1,6043	1,5994	1,5944	1,5897	
	18./6.	A	Fl.	1,6133	1,6086	1,6036	1,5992	1,5944	1,5899	
	24./6.	A	Fl.	1,6127	1,6082	1,6041	1,5988	1,5940	1,5892	
		Mittel	1,6134	1,6088	1,6041	1,5992	1,5943	1,5895	1,5890	
Na gelb	25./3.	A	Fl.	1,6800	1,6256	1,6207	1,6157	1,6109	1,6063	1,6061 1,6025 1,6043
	4./4.	B	Fl.	1,6811	1,6264	1,6216	1,6170	1,6121	1,6077	
	11./6.	B	Fl.	1,6805	1,6263	1,6217	1,6165	1,6121	1,6073	
	18./10.	B	Fl.	1,6818	1,6270	1,6192	1,6171	1,6128	1,6071	
		Mittel	1,6808	1,6264	1,6208	1,6166	1,6118	1,6071	1,6073	
Hg grün	9.—11./4.	A	Fl.)	1,6440	1,6392	1,6343	1,6292	1,6242	1,6191	1,6191 1,6237 1,6239
	8./4.	B	Fl.	1,6441	1,6392	1,6341	1,6290	1,6237	1,6191	
		Mittel	1,6440	1,6392	1,6342	1,6291	1,6239	1,6237	1,6239	
Hg blau	12./6.	B	Fl.	1,6855	1,6910	1,6852	1,6796	1,6742	1,6695	1,6647
				Flüssig-kristallinische Phase I. (Ordentlicher Strahl.)						
	Datum	Prisma	Heizung	30°	35°	40°	45°	50°	53°	56°
Li rot	9./4.	A	Fl.							
	13./4.	A	El.							
	18./6.	A	Fl.	1,5870	1,5879	1,5407	1,5441	1,5495	1,5498	
	24./6.	B	Fl.	1,5872	1,5800	1,5428	1,5459	1,5459	1,5459	
Zn acet.	25./3.	A	Fl.	1,5871	1,5804	1,5441	1,5459	1,5496	1,5496	
		Mittel		± 1	± 10	1,5428	1,5459	1,5459	1,5459	

## Kristallinisch-flüssige Phase II. (Ordentlicher Strahl.)

	Datum	Prisma	Heizung	27°	28°	29°	30°
Li rot	23.—24./10.	A	Fl. *)	1,5211	1,5220	1,5234	1,5249
Na gelb	23./10. 4.—5./11.	A B	Fl. *) Fl. *)	1,5286 Mittel	1,5287 1,5288 1,5286	1,5312 1,5298 1,5305	1,5330 1,5335 1,5332
Hg grün	23./10. 4.—5./11.	A B	Fl. *) Fl. *)	1,5351 1,5336 Mittel	1,5351 1,5355 1,5358	1,5370 1,5369 1,5369	1,5400 1,5400 1,5400
Hg blau	4.—5./11.	B	Fl. *)	1,5687	1,5704	1,5731	1,5794

### 1) E] = Flame

## 2) El. = Elektrische Heizung auf stationäre Temperatur

3) Am 11. Fe

4) Durch Erwärmen mit der Flamme wurde die anisotrope Phase hergestellt, bis etwa 450 °C abgekühlt, die Abkühlung durch äthergetränktes Watte auf den Ansätzen des Apparates bis etwa 350 °C beschleunigt, dann alles sich selbst überlassen.

Der Umwandlungspunkt  $73^\circ$  kann nach dem Schema p. 534 bei einfacher Abkühlung von der isotropen Phase aus gar nicht zur Geltung kommen; die Temperaturen 57 bis  $55^\circ$  sind als Unterkühlungen von  $61^\circ$  anzusehen.

Die zweite kristallinisch flüssige Phase wurde in den ersten Beobachtungsreihen gar nicht erhalten, da diese nur bis zu Temperaturen von etwa  $30^\circ$  fortgesetzt wurden. Erst die Vergleichung mit den Ergebnissen bei M.Ae. gab Veranlassung zum weiteren Herabgehen mit der Temperatur, aber nur der unter 4) p. 543 angegebene Kunstgriff ließ die zweite kristallinische Phase auftreten. Gleichzeitig begannen an einzelnen Stellen der dünnen Schicht feste Kristalle zu erscheinen, die durch ihre weitere Ausbreitung der Beobachtung bei  $27^\circ$  ein Ziel setzten.

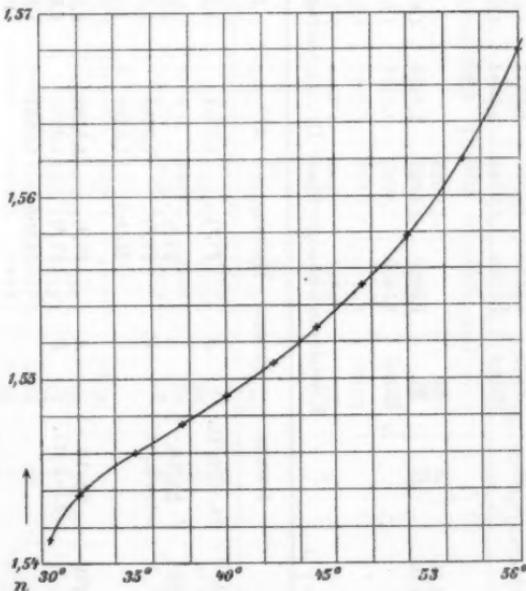


Fig. 4.

Die in größerem Maßstabe gezeichnete Kurve (Fig. 4) für den Brechungskoeffizienten von kr.-fl. I zeigt einen Wendepunkt bei etwa  $37^\circ$ .

Die in Tab. I vereinigten Ergebnisse stimmen für die beiden Apparate *A* und *B*, sowie für Abkühlung nach Flammenheizung und elektrische Heizung auf stationäre Temperatur fast durchweg gut überein, für die isotrope Phase trotz der hohen Temperatur sogar am besten.

Die etwas größeren Abweichungen bei der ersten kristallinen Phase brauchen noch nicht zum ganzen Betrage von Beobachtungsfehlern herzuröhren. Denn einmal erscheint eine von Versuch zu Versuch etwas verschiedene Ausbildung der Struktur nicht ausgeschlossen, ferner könnte infolge der unvermeidlichen häufigen Erwärmungen eine teilweise Umwandlung der Substanz eintreten. Immerhin bleiben diese Änderungen bei Ae.Ae. trotz verschiedener Behandlung in engen Grenzen; so war am 19./10. frisches Material benutzt, während vor dem 25./3. mit derselben Füllung zahlreiche Vorversuche stattgefunden hatten.

Bemerkenswert ist die starke — wohl durch den Charakter als Zimtsäurederivat bedingte — Dispersion, die trotz des nicht sehr hohen Brechungskoeffizienten der des stark brechenden Glases von *B* nahe liegt und für die isotrope Phase sogar noch größer ist:

<i>An</i> für . . . . .	Blau →	Grün →	Gelb →	Rot
Glas von <i>B</i> . . . . .	0,0466	0,0098	0,0142	
Ae.Ae. isotrop . . . . .	0,0515	0,0182	0,0174	
„ „ kr.-fl. I o. Str. . . . .	0,0452	0,0096	0,0137	
“ “ II „ „ . . . . .	0,0350	0,0051	0,0075	

Auf die höchst eigenartlichen Beziehungen des Brechungskoeffizienten zur Temperatur sei hier nur hingewiesen: Die isotrope Phase zeigt eine Abnahme von *n* mit steigender Temperatur, während die kristallinen, besonders die zweite, für den ordentlichen Strahl eine starke Zunahme aufweisen.

#### *Äthoxybenzalamino-a methylzimtsäureäthylester.*

(Hierzu Tab. II, p. 547—550.)

Diese Substanz wurde mit wenigen, in Tab. II hervorgehobenen, Ausnahmen in dem stärker brechenden Prismensystem *B* untersucht, und zwar wurde mit Flamme erwärmt. Die zum Vergleich am 9./7. 08 vorgenommene elektrische

Heizung auf ziemlich hohe stationäre Temperaturen ergab befriedigende Übereinstimmung (vgl. Tab. IIa). Im Blau konnte der Brechungskoeffizient für die isotrope und die erste kristallinische Phase nicht beobachtet werden. Auch die zweite kristallinisch-flüssige Phase machte Schwierigkeiten, und die Ergebnisse sind als weniger sicher zu betrachten.

Im Gegensatz zu Ae.Ae. erleidet M.Ae. durch wiederholte Erwärmung recht erhebliche Änderungen, was sich natürlich erst im Verlauf der Beobachtungen nach längerer Zeit herausstellte.<sup>1)</sup>

Die Umwandlungspunkte, besonders kristallinisch-flüssig I → II, rücken herab (vgl. insbesondere Hg grün 15./7., wo noch bei 58,9° beobachtet werden konnte — gegen etwa 78° bei frischer Substanz).

Dieses Verhalten wird verständlich durch die bei Reibungsversuchen von Hrn. Dickenschied gemachte Wahrnehmung, daß sich bei wiederholter Erwägung von M.A. ein Zersetzungprodukt bildet. Dieses löst sich in dem unveränderten Bestandteil und setzt die Umwandlungstemperatur herab — analog der Gefrierpunktserniedrigung durch Auflösung. Außerdem können durch den Fremdkörper auch die Unterkühlungsvorgänge beeinflußt werden.

Daß infolge der geringen Wärmetönung bei dem Übergang kristallinisch-flüssig I → II die Übergangstemperatur sich bei Auflösung fremder Substanzen stark ändert, hat schon Hr. Schenck<sup>2)</sup> hervorgehoben.

Gleichzeitig nimmt der Brechungskoeffizient für die isotrope Phase ab, für die beiden kristallinischen zu. Hieraus ist zu schließen, daß der Brechungskoeffizient der neugebildeten Substanz zwischen dem der ursprünglichen für „isotrop“ und kristallinisch-flüssig I liegt.

Unter Tab. IIb ist für einige Fälle die folgeweise Änderung der Brechungskoeffizienten durch mehrfache Erwärmung zusammengestellt.

1) Es braucht wohl kaum besonders betont zu werden, daß die verschiedenen Angaben für „veränderte Substanz“ sich nicht auf genau vergleichbare Zustände beziehen.

2) Schenck, Kristallinische Flüssigkeiten und flüssige Kristalle.

Tabelle II.  
Brechungsindex. Isotrope Phase.

	Datum	Bemerkungen	120°	125°	130°	135°	140°	145°	150°
Li rot	20./7.	Frische Substanz	1,5945	1,5924	1,5900	1,5880	1,5860		
	16./7.	Verändert	1,5925	1,5899	1,5872	1,5846	1,5820		
	18./9.	Darst. II frisch	1,5936	1,5918	1,5896	1,5873			
	21./9.	" verküldert	1,5947	1,5931	1,5898	1,5855	1,5867	1,5850	
Na gelb	9./7.	Frische Substanz <sup>1)</sup>	1,6119	1,6097	1,6075	1,6054	1,6037	1,6021	
	10.-13./7.	Verändert <sup>1)</sup>	1,6102	1,6077	1,6053	1,6030	1,6008	1,5989	
	19.-21./3.	[118°] [1,6126]		1,6117	1,6074				
	18./9.	Prisma A Ziemlich frisch	1,6121	1,6098					
Hg grün	30.-31./12.	Darst. II zieml. frisch <sup>2)</sup>			1,6068	1,6044	1,6023	1,6012	
	15.-16./7.	Frische Substanz	1,6266	1,6242	1,6218	1,6194	1,6170	1,6148	1,6127
	10.-11./7.	Verändert <sup>1)</sup>	1,6231	1,6203	1,6182	1,6158	1,6137	1,6118	1,6105
	15.-18./9.	Ziemlich frisch	1,6264	1,6235	1,6213	1,6184	1,6164	1,6142	

1) Mittelwerte aus sehr nahe stimmenden Beobachtungsserien.

2) Für die eingeklammerten Beobachtungen gelten die darüber angegebenen Temperaturen.

3) Während der endgültigen Niederschrift wurden noch einige Beobachtungen mit Prismen A, Erwärmung durch Flamme, gemacht. Am 31./12. ist ein anderes Spektrometer benutzt. Diese Beobachtungen ordnen sich sämtlich gut ein.

Tabelle II (Fortsetzung).  
Flüssig-kristallinische Phase I. Ordentlicher Strahl.

	Datum	Bemerkungen	75°	80°	85°	90°	95°	100°	105°
Li rot	16./7. 21./7.	Ziemlich frisch Verändert		1,5201	1,5215	1,5227	1,5178	1,5185	1,5193
	18./9. 21./9.	Darst. II frisch " verändert	1,5150 1,5181	1,5174 1,5198	1,5192 1,5213	1,5210 1,5227	1,5237	1,5243 1,5244	1,5259
	6.-9./7. 13./7.	Frisch *) Verändert	1,5254 1,5333 [ 1,5284 65° 70° ] <sup>b)</sup> 1,5345 1,5313 ]	1,5288 1,5303	1,5321	1,5340	1,5359		
	20./8. 18./8. 30.-31./12.	Priama A zieml. frisch Ziemlich frisch Darst. II zieml. frisch *)	1,5290 1,5288 1,5284	1,5310 1,5303 1,5284	1,5329 1,5322 1,5340	1,5349 1,5340 1,5359	1,5371 1,5359	1,5403	1,5424
Hg grün	15./7. 15./7. 18./9. 30./12.	Frisch, 2 Reihen ) Verändert Ziemlich frisch Darst. II zieml. frisch *)	[ 60° 1,5417 1,5318 ] 1,5344 1,5357 1,5326	1,5341 1,5434 1,5360 1,5355	1,5368 1,5454 1,5380 1,5377	1,5382 1,5484 1,5408 1,5884	1,5403 1,5421 1,5447 1,5410		

Flüssig-kristallinische Phase II. Ordentlicher Strahl.

	Datum	Bemerkungen	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°
Li rot	21./7.	Ziemlich frisch	1,5091	1,5083	1,5077	1,5071	1,5068	1,5072	1,5084	
	11./7.	Verändert		1,5115	1,5107	1,5104				
	18./9.	Füllung vom 21./7. <sup>2)</sup>	1,5103	1,5095	1,5087					
	18./9.	Darst. II frisch	1,5082	1,5076	1,5067	1,5061	1,5057	1,5054	1,5062	
	21./9.	" mehrf. erw.	1,5091	1,5078	1,5071	1,5065	1,5062	1,5061	1,5067	
	31./12.	" zieml. frisch <sup>1)</sup>		1,5086	1,5080	1,5075	1,5071	1,5068		
Na gelb	6.-9./7.	Frisch	1,5170	1,5164	1,5158	1,5152	1,5150	1,5150	1,5160	
	13./7.	Verändert		1,5189	1,5181					
	20.-21./8.	Prisma A zieml. frisch <sup>1)</sup>	1,5170	1,5162	1,5154	1,5149	1,5147	1,5150	1,5157	
	18./9.	Ziemlich frisch								
	18./9.	Darst. II frisch	1,5159	1,5152	1,5145	1,5139	1,5136	1,5135	1,5132	
	30.-31./12.	Darst. II zieml. frisch <sup>4)</sup>		1,5154	1,5146	1,5142	1,5137	1,5134	1,5139	
Hg grün	15./7.	Frisch	1,5208	1,5202	1,5196	1,5191	1,5189	1,5191	1,5198	1,5221
	15./7.	Verändert	1,5274	1,5278						
	18./9.	Ziemlich frisch		1,5207	1,5206	1,5202	1,5199	1,5198	1,5207	
	30./12.	Darst. II zieml. frisch <sup>4)</sup>		1,5208	1,5196	1,5190	1,5186	1,5186	1,5191	
Hg blau	15.-16./7.	Dritte Erwärmung <sup>1)</sup>	1,5501	1,5501	1,5499	1,5496	1,5498	1,5498	1,5522	

1) Mittelwerte aus sehr nahe stimmenden Beobachtungsserien.

2) Erste Erwärmung nach dem 21./7.

 3) Für die eingeklamerten Beobachtungen gelten die darüber angegebenen Temperaturen.  
 4) Während der endgültigen Niederschrift wurden noch einige Beobachtungen mit Prisma A, Erwärmung durch Flamme, gemacht. Am 31./12. ist ein anderes Spektrometer benutzt. Diese Beobachtungen ordnen sich sämtlich gut ein.

Tabelle IIa.

M.Ae. Mit elektrischem Öfchen auf stationäre Temperatur erwärmt.

	Datum	Bemerkungen	121,4°	131,8°	142,1°
Hg grün	9./7.	Aus 10, 11, 15/7 (Flammen) berechnet	1,6210 1,6223	1,6163 1,6173	1,6133 1,6129

Tabelle IIb.

M.Ae. Änderung durch mehrfache Erwärmung.

Hg grün	75°	kr.-fl. I	16./7. 11./7. (a) 1,5377 1,5397	11./7. (b) 1,5419	13./7. 15./7. (a) 1,5440 1,5463	15./7. (b) 1,5484
Hg grün	50°	kr.-fl. II	16./7. 11./7. (a) 1,5217 1,5248	11./7. (b) 1,5257	15./7. (a) 1,5276	15./7. (b) 1,5284

Die Umwandlungstemperaturen sind:

	nach Vorländer	nach Sultze <sup>1)</sup> (Dielektrizitäts- konstante)	nach optischer Beob. an ganz frischer Subst. Temperatur fallend      steigend
isotrop → kr.-fl. I	125°	124,5	(123,6)      124,1
kr.-fl. → II . .	76	76	(78,2)      76,2

Bei mehrfach erwärmer Substanz konnte die isotrope Phase verfolgt werden bis 106,5°; die kr.-fl. I bis 55,1, die kr.-fl. II bis 36,8 (frische Substanz erstarrte bei 42—40°).

Die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Temperatur ist für die isotrope und die erste kristallinisch-flüssige Phase sehr ähnlich wie bei Ae.Ae., insbesondere wächst für diese letztere der Brechungsindex stark mit steigender Temperatur.

Die zweite kristallinisch-flüssige Phase ließ sich für M.Ae. über ein weit größeres Temperaturintervall verfolgen. Mit abnehmender Temperatur sinkt der Brechungsindex zunächst ziemlich schnell, wenn auch nicht in dem Maße wie bei Ae.Ae., erreicht etwa bei 60° ein Minimum und steigt dann wieder langsam an.

1) Sultze, Diss. Halle 1908.

Fig. 5 gibt eine Übersicht über die Brechungsindizes. Eingetragen sind diejenigen Beobachtungen, mit denen in Tab. II die Aufzählung jedesmal beginnt.

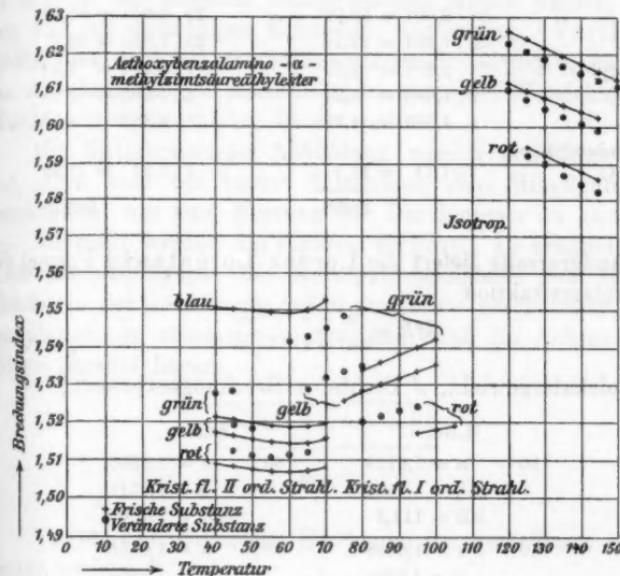


Fig. 5.

Von D. wurde noch der Versuch gemacht, den Brechungskoeffizienten der isotropen und ersten kristallinisch-flüssigen Phase von Ae.Ae. mit Hilfe Newtonscher Ringe zu kontrollieren.

Linse und Platte hatten den Brechungskoeffizienten 1,93; sie befanden sich in einem besonderen elektrisch geheizten Kupferapparat, dessen Temperatur thermoelektrisch gemessen wurde. Es wurde in den besten Versuchen erhalten (isotrop) 1,628 statt 1,623, und (kr.-fl. I) 1,568 statt 1,566.

Indessen steht die Methode in optischer und thermometrischer Beziehung gegen die Prismenmethode erheblich zurück.

Aus dem Brechungskoeffizienten der isotropen Phase lässt sich noch die Molekularrefraktion berechnen und mit der Summe der Atomrefraktionen vergleichen.

Nach Mitteilung von Vorländer ergibt sich letztere für Na gelb:<sup>1)</sup>

M.Ae. = C <sub>21</sub> H <sub>22</sub> NO <sub>3</sub> . M = 337.	Ae.Ae. = C <sub>23</sub> H <sub>25</sub> NO <sub>3</sub> . M = 351.
C . . . . . 21 . 2,501 = 52,52	22 . 2,501 = 55,02
H . . . . . 23 . 1,051 = 24,17	25 . 1,051 = 26,27
Karbonyl-O . . . 1 . 2,287 = 2,29	1 . 2,287 = 2,29
Äther-O . . . . 2 . 1,683 = 3,37	2 . 1,683 = 3,37
N . . . . . 1 . 4,363 = 4,36	1 . 4,363 = 4,36
Äthylenbindungen von C . . . . 7 . 1,71 = 11,97	7 . 1,71 = 11,97
	98,68
	103,28

Andererseits liefert die Lorenz-Lorentzsche Formel die Molekularrefraktion

$$MR = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}, \quad \frac{M}{d}.$$

(M Molekulargewicht, d Dichte, n Brechungsexponent.)

M.Ae.	Ae.Ae.
110°: n = 1,6118	60°: n = 1,6308
d <sup>2)</sup> = 1,056;	d = 1,0717
MR = 111,1	MR = 116,6
140°: n = 1,6038	90°: n = 1,6166
d = 1,028;	d = 1,0466
MR = 112,7	MR = 117,3

Die Unterschiede sind also recht beträchtlich, was bei der komplizierten Zusammensetzung zu erwarten war.

## II. Die Ringe im konvergenten polarisierten Licht.<sup>3)</sup>

Erwärmst man eine der untersuchten Substanzen in dünner Schicht zwischen zwei Glasplatten bis zur isotropen Phase, so erscheint in einem Polarisationsapparat für konvergentes Licht das Präparat bei gekreuzten Nicols natürlich dunkel.

1) N = 4,36 nach Brühl, Zeitschr. f. physik. Chem. 16. p. 497. 1895; 22. p. 373. 1897; die andern Zahlen nach Conrady, ebenda 3. p. 210. 1889.

2) Die Dichten nach Dickenschied, Diss. Halle 1908.

3) Vgl. hierzu D. Vorländer, Zeitschr. f. physik. Chem. 61. (2) p. 166. 1907.

Mit dem Eintreten der ersten kristallinisch-flüssigen Phase hellt sich das Gesichtsfeld plötzlich auf; es entstehen mehr oder weniger regelmäßige Interferenzbilder, welche stellenweise zu Ringen mit dunklem rechtwinkligem Kreuz werden, ähnlich wie bei einachsigen Kristallen, nur matter. Vorländer erklärt dies nach seiner „Stäbchentheorie“ dadurch<sup>1)</sup>, daß sich die stäbchenförmigen Molekülbündel unter der Einwirkung der Glasflächen senkrecht zu diesen stellen.

Mit fortschreitender Abkühlung werden die Ringe enger ( $L_1$ ), doch sind bei beiden Substanzen diese Ringfiguren zu vergänglich, um eine Messung der Durchmesser zu gestatten.

Nunmehr werden die Figuren verzerrt. D. erkannte, daß diese Zwischenfiguren der Kalkspatdoppelplatte von Brezina ähneln, in der zwei wenig schief zur Achse geschnittene Kalkspatplatten so zusammengesetzt sind, daß die Achsen einer Ebene parallel liegen.



Fig. 6.

Vorländer hat diese Erscheinungen gemeinsam mit L. weiter verfolgt.<sup>2)</sup>

Die Stäbchentheorie gibt hierfür die Erklärung, daß infolge von Temperaturdifferenzen und die eventuell durch diese bedingten ungleichzeitigen Umwandlungen in der Schicht Strömungen entstehen, welche — da ja die an die Glasflächen grenzenden Teilchen an diesen haften — eine obiger Fig. 6 entsprechende Struktur erzeugen.

Die zweite kristallinisch-flüssige Phase zeigt dann wieder Ringe mit dunklem Kreuz, und zwar so klar, wie nur eine schöne Platte eines einachsigen Kristalls.<sup>3)</sup>

Ob diese schon von Vorländer hervorgehobene Analogie auch in quantitativer Hinsicht Stand hält, konnte nur eine messende Untersuchung lehren.

1) l. c. p. 2042.

2) l. c. p. 2051.

3) Vorländer erhielt klare Schichten bis zu 0,8 mm Dicke, Achsenbilder in trüben Schichten bis zu mehr als 1 mm. l. c. p. 2044.

Es mögen zunächst aus der Theorie der einachsigen Kristalle die nötigen Formeln hergesetzt werden.

Seien

- $n_a, n_c$  die beiden Hauptbrechungskoeffizienten,
- $a, c$  ihre Reziproken (also die Geschwindigkeiten der entsprechenden Wellen im Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit im Vakuum),
- $\varphi$  der Einfallswinkel,
- $\varphi_0, \varphi_e$  die Winkel zwischen dem Einfallslot (das mit der optischen Achse zusammenfällt) und den beiden Wellennormalen,
- $\lambda$  die Wellenlänge,
- $A$  die Dicke der Platte,

so gilt bei gekreuzten Nicols für den  $m^{\text{ten}}$  dunklen Ring<sup>1)</sup> streng

$$(4) \quad a^2 - c^2 = \frac{m \lambda}{A} \frac{\sin \varphi_0 \sin (\varphi_0 + \varphi_e)}{\sin^2 \varphi \sin \varphi_e} = m \lambda \frac{a}{A} \frac{\sin (\varphi_0 + \varphi_e)}{\sin^2 \varphi \sin \varphi_e}.$$

Diese Formel kann *unmittelbar* nicht verwendet werden. Tatsächlich wurde zuerst durch die angenäherte Formel

$$(5) \quad a^2 - c^2 = \frac{2 m \lambda a}{A \sin^2 \varphi}$$

für jeden der beobachteten Ringe ein Näherungswert von  $c^2 - a^2$  berechnet.  $a$  war als  $1/n_a$  aus den Prismenbeobachtungen bekannt, somit  $c$  angenähert zu ermitteln.

Nunmehr konnten nach

$$(6) \quad \sin \varphi_0 = a \sin \varphi,$$

$$(7) \quad \sin \varphi_e = \frac{a \sin \varphi}{\sqrt{1 + (a^2 - c^2) \sin^2 \varphi}},$$

$\varphi_0$  und  $\varphi_e$  erhalten, und durch Eintragen in (4) ein verbesselter Wert von  $c^2 - a^2$  abgeleitet werden.

Die *Wiederholung* dieser Näherungsrechnung wurde dadurch umgangen, daß durch graphische Extrapolation (Abszissen  $m$ , Ordinaten die zugehörigen  $a^2 - c^2$ ) der Wert von  $a^2 - c^2$  für „ $m = 0$ “ bestimmt und dieser in (7) verwertet wurde. Das Einsetzen in (4) ergab dann nur noch eine geringe Änderung.

Die *Ringdurchmesser*  $2\varphi$  wurden vermittelst eines vorzüglichen Polarisationsapparates nach Groth mit Okularskala gemessen, für dessen Überlassung wir Hrn. Dr. H. Hauswaldt

1) Vgl. z. B. F. E. Neumann, Vorlesungen über theoretische Optik p. 225.

zu Dank verpflichtet sind. Um die Skala zu berichtigen, wurden für eine Kalkspat- und eine Quarzplatte (Dicke 1,000<sub>5</sub> bzw. 2,785 mm) die Ringdurchmesser bei Natriumlicht zunächst mit einem Achsenwinkelapparat nach v. Lang und dann mit dem Grothschen Apparat ermittelt, wobei sich eine sehr befriedigende Proportionalität herausstellte.

Besondere Schwierigkeit machte die Bestimmung der *Schichtdicke* der Substanz.

Um diese möglichst gleichmäßig zu machen, wurden Objektträger und Deckglas, zwischen denen sich die Substanz befand, durch vier Stückchen Platindraht (von 0,02—0,05 mm Stärke) getrennt; die Substanz füllte den Raum zwischen Objektträger und Deckglas ganz aus und umspülte auch die Drähtchen.

Bei den ersten von L. angestellten Versuchen wurden ausgesuchte Objektträger und Deckgläser verwendet. Gemessen wurde die Dicke des ganzen Präparates sowie die der beiden Gläser, und zwar an der für die optische Messung benutzten Stelle. Wenn hierbei auch die „Fühlsschraube“ des Hommelschen Schraubendickenmessers möglichst empfindlich gestellt wurde, so ist eine kleine Kompression der kristallinischen Flüssigkeit nicht ausgeschlossen. Beträchtlich kann aber der hierdurch entstehende Fehler nicht gewesen sein, denn einmal ist die zweite kristallinisch-flüssige Phase ziemlich zäh und außerdem fand die Messung meistens statt, nachdem schon kleine feste Kristalle sich ausgeschieden hatten, die sich durch mäßige Kräfte nicht merklich zusammendrücken lassen.

Bei dieser Messungsreihe war außer einem starken Terquazbrenner mit Natrium noch ein zweiter mit Lithium und Rotfilter und die Quecksilberbogenlampe so aufgestellt, daß eine geringe Drehung des Polarisationsapparates bzw. Vorsetzen eines Lichtfilters genügte, um von Natrium schnell zu einer der drei anderen Farben überzugehen. Es wurde so *dasselbe unveränderte<sup>1)</sup> Präparat* mit Natrium und einer oder zwei anderen Farben beobachtet und hierdurch die Möglichkeit gewonnen, von den gleich zu erörternden *genauereren* Messungen mit Natrium ausgehend den zweiten Hauptbrechungskoeffizienten auch für

1) Abgesehen von kleinen Dickenänderungen durch Abkühlung und Bildung kleiner Kristalle in der Nähe der beobachteten Stelle.

die anderen Farben *unabhängig* von den *Dickenfehlern der ersten Reihe* zu erhalten.

Kennt man nämlich für Natriumlicht  $a^2 - c^2$ , so erlaubt die Gleichung (4) umgekehrt aus den Natriumringen die Dicke der Schicht zu berechnen und damit weiter  $a^2 - c^2$  für die anderen Farben.

Für die zweite von D. ausgeführte genauere Beobachtungsreihe mit Natrium wurden zunächst als Objektträger und Deckgläser *Planparallelplatten* von Steinheil benutzt, und die *Dickenmessungen* in erster Linie auf ein *Instrument* von Zeiss gegründet, bei welchem der Druck auf das Präparat nur minimal war.

Das Objekt liegt auf einer planen Glasplatte; von oben senkt sich darauf mit sehr geringem Übergewicht eine Skala mit Achatknopf unten, die durch ein horizontal am Stativ des Apparates feststehendes Mikroskop mit Okularschraubenmikrometer abgelesen wird.

Für die Hauptteile der Skala waren die Korrekturen in der Normaleichungskommission ermittelt; für die zwischenliegenden wurde die Kalibrierung hier ausgeführt.

Zwischen der (sorgfältig gereinigten!) Grundplatte des Apparates und den aufgelegten Planparallelgläsern treten Farben dünner Blättchen auf. Bei der Ausmessung der *Deckgläser* wurde die entsprechende Dicke der Luftsicht berücksichtigt, bei den *Objektträgern* wurde sie nicht in Abzug gebracht, sondern darauf geachtet, daß bei den Hauptbeobachtungen an den Präparaten nahe die nämliche Farbe erschien, so daß sich die Dicke der Luftsicht forthob.

Übrigens wurden die Messungen der Glasdicken sowie der ganzen Präparate<sup>1)</sup> auch mit dem Hommelschen Schraubendickenmesser ausgeführt. Die Differenzen betrugen in der Regel kaum 1  $\mu$ , und stiegen nur selten auf 2  $\mu$ .

Die Dicke des ganzen Präparates wurde von L. nach der Ringmessung, von D. öfter auch vor- und nachher bestimmt.

---

1) Hier *nach* der Messung mit Zeissapparat.

## Ringbeobachtungen bei Ae.Ae.

Natrium gelb.

Da die zweite kristallinisch-flüssige Phase hier ziemlich dicht vor dem Erstarren auftritt, ist gesetzt  $n_a = 1,530$  (bzw. 1,529<sub>5</sub>), etwa der Temperatur 28° entsprechend.

Zur Veranschaulichung der Verhältnisse mögen folgende Beobachtungen von D. dienen.

$d = 0,0527 \text{ mm nach Ringen gemessen.}$

2φ Skt.	18,9	20,0	24,7	28,7	Mittel
φ°	18,06	25,87	31,82	36,81	
a <sup>2</sup> - c <sup>2</sup>	0,1497	0,1487	0,1503	0,1528	0,1503

$d = 0,0325 \text{ mm (vorher 0,0330, nachher 0,0321).}$

2φ Skt.	17,7	25,2 <sub>5</sub>	31,5		
φ°	22,86	32,55	40,45		
a <sup>2</sup> - c <sup>2</sup>	0,1526	0,1550	0,1557		0,1544

$d = 0,0246 \text{ mm (vorher 0,0248, nachher 0,0244).}$

2φ Skt.	20,2	29,3	37,0 <sub>5</sub>		
φ°	26,09	37,48	47,34		
a <sup>2</sup> - c <sup>2</sup>	0,1569	0,1583	0,1569		0,1574

Nach der Dicke geordnet ergaben die Beobachtungen von D. (in der Regel drei, einmal vier Ringe).

## Ae.Ae. Natrium gelb.

$d$	$a^2 - c^2$	$d$	$a^2 - c^2$	$d$	$a^2 - c^2$	Haupt-mittel
0,024 <sub>4</sub> *	0,1530	0,032 <sub>5</sub>	0,1544	0,052 <sub>1</sub>	0,1535	
0,024 <sub>6</sub>	0,1574	0,033 <sub>1</sub> *	0,1502	0,052 <sub>7</sub> *	0,1508	
0,025 <sub>7</sub> *	0,1483			0,053 <sub>5</sub> *	0,1484	
				0,054 <sub>4</sub>	0,1578	
	0,1529		0,1523		0,1515	0,1526
						± 37

\* Die Dicke ist nur nachher gemessen.

Für dasselbe Präparat zeigen die Ringe keine merkliche Tendenz, mit der Ordnungszahl steigende oder fallende  $a^2 - c^2$

zu liefern; ebenso läßt sich keine Abhängigkeit von der Dicke erkennen.

Die *Ringe befolgen* daher, soweit man es nach den Beobachtungen beurteilen kann, die *Gesetze, welche für einachsige feste Kristalle gelten*.

Die — schon vor der Ausrechnung als zuverlässiger bezeichneten — Beobachtungen von L. führten auf:

Natrium gelb.

$A$	$a^2 - c^2$	$A$	$a^2 - c^2$
0,0197	0,1554	0,0285	0,1472
0,0215	0,1537	0,0287	0,1518
0,0217	0,1672	0,0297	0,1572
0,0237	0,1600	Mittel	0,1561 ± 46

Bei der Dickenmessung war die Substanz noch flüssig mit beginnender Kristallbildung.

Eine Abweichung im Sinne der wirklich vorliegenden war zu erwarten, da die im Nenner der Formel (4) stehende Dicke wegen der Kompression wohl etwas zu klein erhalten wurde. Übrigens gaben auch hier die Ringe verschiedener Ordnungszahl gleiche  $a^2 - c^2$ .

Für die anderen Farben lieferte das p. 556 auseinander gesetzte Verfahren nach Beobachtungen von L.

Ae.Ae.  $a^2 - c^2$ .

$A$ ber.	Li rot	Hg grün	Hg blau
0,0200	0,1506	0,1566	0,1994
0,0237	0,1508	0,1583	0,1980
0,0248	0,1510	0,1613	0,2024
0,0275	0,1524	0,1578	0,1994
0,0285	0,1482	0,1588	0,2021
0,0306	0,1536	0,1570	0,1998
0,0806	0,1457	0,1531	—
Mittel	0,1508 ± 19	0,1575 ± 17	0,2002 ± 14

Hieraus lässt sich weiter der zweite Hauptbrechungskoeffizient berechnen. Nachstehend sind die Werte mit dem des ersten zusammengestellt; die zugehörige Temperatur ist 28°.

## Ae.Ae.

	Li rot	Na gelb	Hg grün	Hg blau
$\lambda$	6708	5898	5461	4357
$n_a$	1,522 <sub>0</sub>	1,529 <sub>5</sub>	1,535 <sub>0</sub>	1,570 <sub>5</sub>
$n_c$	1,885 <sub>1</sub>	1,907 <sub>5</sub>	1,935 <sub>7</sub>	2,207 <sub>4</sub>
$n_a - n_c$	0,363 <sub>1</sub>	0,378 <sub>0</sub>	0,400 <sub>7</sub>	0,636 <sub>9</sub>

Die Doppelbrechung ist also bei dieser kristallinischen Flüssigkeit außerordentlich groß, wie durch Vergleich mit einem so stark doppelbrechenden Kristall wie Kalkspat hervorgeht.

## Kalkspat.

	Li rot	Na gelb	Hg grün	Hg blau
$\lambda$	6708	5898	5461	4357
$n_a$	1,6537	1,6584	1,6618	1,6753
$n_c$	1,4843	1,4864	1,4880	1,4942
$n_a - n_c$	0,1694	0,1720	0,1738	0,1811

Beachtenswert ist auch die außerordentliche Zunahme der Doppelbrechung nach dem violetten Ende des Spektrums.

## Ringbeobachtungen für M.Ae.

Die Ringbeobachtungen sind hier insofern bequemer auszuführen, als die zweite kristallinisch flüssige Phase sich über ein erheblich größeres Temperaturintervall erstreckt.

Andererseits bedingt die Veränderung der Substanz bei wiederholter Erwärmung, welche schon früher hervorgehoben wurde, eine gewisse Unsicherheit. Da die Herstellung und Beobachtung der Präparate ein mehrfaches Erwärmen erforderlich machte, so ist bei Rot, Gelb und Grün für den Brechungskoeffizienten des ordentlichen Strahles der „veränderte“ Wert zugrunde gelegt worden; bei Blau liegt nur der „unveränderte“ vor. Also:

Li rot	Na gelb	Hg grün	Hg blau
$n_a$ 1,513	1,520	1,529	1,551

Die Beobachtungen von D., bei denen Planparallelgläser Anwendung fanden und die Dicke mit dem Apparat von Zeiss ermittelt war, ergaben:

Na gelb.

$d$	Ringzahl	$a^2 - c^2$	$d$	Ringzahl	$a^2 - c^2$
0,025 <sub>1</sub> *	3	0,166 <sub>5</sub>	0,033 <sub>2</sub> *	4	0,155 <sub>3</sub>
0,028 <sub>0</sub> *	3	0,165 <sub>0</sub> <sup>1)</sup>	0,034 <sub>0</sub>	4	0,157 <sub>3</sub>
0,029 <sub>6</sub> *	3	0,159 <sub>3</sub>	0,051 <sub>8</sub>	4	0,159 <sub>2</sub>
0,032 <sub>1</sub> *	4	0,165 <sub>0</sub>	0,052 <sub>0</sub>	4	0,157 <sub>9</sub>
				Mittel	0,160 <sub>4</sub> <sup>2)</sup> $\pm 2_9$

\* Dicke nur nachher gemessen.

Die Beobachtungen von L. (ausgewählte gewöhnliche Gläser, Hommels Dickenmesser) lieferten:

Na gelb.

$d$	Ringzahl	$a^2 - c^2$	$d$	Ringzahl	$a^2 - c^2$
0,0255	3	0,1659	0,0475	2	0,1540
0,0265	2	0,1632	0,0475	3	0,1515
0,0265	6	0,1600 <sup>3)</sup>	0,0572	3	0,1521
0,0270	2	0,1656	0,0582	5	0,1557 <sup>4)</sup>
0,0372	2	0,1560	0,0582	5	0,1572 <sup>5)</sup>
0,0382	3	0,1589	0,0582	2	0,1619
0,0465	3	0,1546	0,0592	2	0,1588
				Mittel	0,1575 $\pm 36$

Bei dieser Substanz hat es den Anschein, daß für geringere Dicken die Doppelbrechung etwas stärker ausfällt als für größere. Dies würde verständlich sein, wenn man die Doppelbrechung auf eine Parallelstellung der „langen“ Moleküle<sup>4)</sup> unter dem Einfluß der begrenzenden Glasflächen zurückführt,

1) Mittel aus vier gut stimmenden Beobachtungen.

2) Unter Beachtung der Ringzahl berechnet. Später ist der wesentlich abweichende Wert 0,1600 benutzt.

3) Mittel aus zwei Beobachtungen, 6 bzw. 5 ist die Gesamtzahl der Ringe.

4) Vgl. Vorländer, Ber. d. Deutsch. chem. Ges. 31. p. 2034. 1908.

indem bei größerem Abstand der Parallelismus unvollständiger sein kann, besonders in der Mitte der Schicht.

Daß die älteren Messungen von L. hier im Mittel ein etwas kleineres  $a^2 - c^2$  liefern, ist zum Teil durch das Überwiegen der Beobachtungen mit größeren Dicken bedingt.

Von der Ordnungszahl der Ringe war das Ergebnis aber auch für M.Ae. unabhängig, z. B.  $a^2 - c^2$  für

$\Delta$	$m = 1$	2	3	4
0,0321	0,1653	0,1652	0,1660	0,1660
0,0520	0,1569	0,1588	0,1576	0,1577

Die Rechnung für die anderen Farben wurde nach den Beobachtungen von L. ebenso ausgeführt wie oben für Ae.Ae. Die Ergebnisse sind:

M.Ae.

Li rot		Hg grün		Hg blau	
$\Delta$ ber.	$a^2 - c^2$	$\Delta$ ber.	$a^2 - c^2$	$\Delta$ ber.	$a^2 - c^2$
0,026 <sub>5</sub>	0,154 <sub>7</sub>	0,026 <sub>4</sub>	0,162 <sub>0</sub>	0,026 <sub>5</sub>	0,201 <sub>5</sub>
0,027 <sub>0</sub>	0,149 <sub>9</sub>	0,026 <sub>5</sub>	0,164 <sub>0</sub>	0,026 <sub>5</sub>	0,203 <sub>5</sub>
0,036 <sub>8</sub>	0,149 <sub>5</sub>	0,027 <sub>0</sub>	0,156 <sub>2</sub>	0,027 <sub>0</sub>	0,206 <sub>8</sub>
0,038 <sub>1</sub>	0,147 <sub>7</sub>	0,027 <sub>0</sub>	0,155 <sub>8</sub>	0,035 <sub>6</sub>	0,207 <sub>0</sub>
0,045 <sub>0</sub>	0,151 <sub>9</sub>	0,036 <sub>8</sub>	0,161 <sub>5</sub>	0,036 <sub>3</sub>	0,198 <sub>6</sub>
0,056 <sub>8</sub>	0,156 <sub>4</sub>	0,036 <sub>8</sub>	0,161 <sub>0</sub>	0,038 <sub>0</sub>	0,201 <sub>6</sub>
0,056 <sub>8</sub>	0,156 <sub>8</sub>	0,045 <sub>7</sub>	0,155 <sub>7</sub>	0,039 <sub>2</sub>	0,206 <sub>9</sub>
0,058 <sub>8</sub>	0,147 <sub>0</sub>	0,054 <sub>4</sub>	0,167 <sub>1</sub>	0,044 <sub>9</sub>	0,205 <sub>4</sub>
		0,056 <sub>8</sub>	0,164 <sub>3</sub>	0,056 <sub>8</sub>	0,207 <sub>2</sub>
		0,058 <sub>9</sub>	0,159 <sub>5</sub>	0,057 <sub>2</sub>	0,197 <sub>1</sub>
				0,058 <sub>9</sub>	0,201 <sub>0</sub>
Mittel	0,151 <sub>7</sub> $\pm 3_1$		0,160 <sub>7</sub> $\pm 3_1$		0,203 <sub>8</sub> $\pm 3_1$

Hieraus folgt nun weiter

M.Ae.

	Li rot	Na gelb	Hg grün	Hg blau
$\lambda$	6708	5898	5461	4857
$n_s$	1,513	1,520	1,529	1,551
$n_e$	1,872 <sub>7</sub>	1,914 <sub>8</sub>	1,935 <sub>1</sub>	2,160 <sub>8</sub>
$n_e - n_s$	0,359 <sub>7</sub>	0,894 <sub>8</sub>	0,406 <sub>1</sub>	0,618 <sub>8</sub>

Für die Berechnung von  $a^2 - c^2$  macht eine kleine Änderung von  $n_a$  nicht viel Unterschied. Kombiniert man die obigen Werte von  $a^2 - c^2$  mit den  $n_a$  der „unveränderten“ Substanz, so erhält man

	Li rot	Na gelb	Hg grün	Hg blau
$\lambda$	6708	5893	5461	4357
$n_a$	1,511	1,518	1,522	wie oben
$n_c$	1,868 <sub>9</sub>	1,910 <sub>5</sub>	1,921 <sub>6</sub>	
$n_c - n_a$	0,357 <sub>9</sub>	0,392 <sub>5</sub>	0,399 <sub>6</sub>	

Die Doppelbrechung ist also von derselben Größenordnung wie für Ae.Ae.

Es fragt sich nun, inwieweit es möglich ist, die beobachteten optischen Erscheinungen auf Grund von molekular-theoretischen Vorstellungen über die Struktur der flüssigen Kristalle verständlich zu machen.

Vorländer<sup>1)</sup> hat gezeigt, daß die Moleküle einer Substanz eine lineare, möglichst lange Gestalt haben müssen, um kristallinische Flüssigkeiten zu liefern. Vorländer denkt sich das Gefüge derselben so, daß die linearen Moleküle zu stäbchenförmigen Bündeln und Säulen zusammentreten, und führt die oft vorhandene Trübung zurück auf die Lichtbrechung an den einzelnen verschieden gerichteten anisotropen Kristallen und Kristallfragmenten, während die *klaren* kristallinischen Flüssigkeiten zwischen Glasplatten dadurch zustande kommen, daß die Molekülbündel sich untereinander parallel senkrecht zu den Glasflächen stellen.

Hr. Bose hat dann diese Vorstellung unter dem Namen „Schwarmtheorie“ weiter auszubauen versucht.<sup>2)</sup> Ein Schema für das Auftreten von *zwei* kristallinisch-flüssigen Phasen gewinnt er durch Einführung eines *dreiachsigen* Ellipsoides als Molekülförm. In der *trüben* Phase sollen sich die *großen* Achsen bereits parallel geordnet haben, während bezüglich der

1) D. Vorländer, Ber. d. Deutsch. chem. Ges. 31. p. 2034. 11. Mai 1908, insbes. p. 2039 u. 2040.

2) E. Bose, Physik. Zeitschr. 9. p. 708. 1908 u. 10. p. 230. 1909.

beiden anderen noch Unordnung besteht, in der *klaren* Phase soll auch für *diese Ordnung* eingetreten sein. Die Parallelrichtung soll dabei nicht als ein „starrer Parallelismus“ aufgefaßt werden, sondern es ist damit gemeint, daß die „statistischen Mittelwerte“ (im Sinne einer kinetischen Theorie) der einzelnen Molekülachsenrichtungen einander parallel sind.<sup>1)</sup>

Die Ungleichwertigkeit verschiedener zur *Längserstreckung* senkrechter Richtungen kommt noch treffender in Vorländers Hinweis auf die „Seitenketten“ zum Ausdruck.<sup>2)</sup>

Gegen Boses Vorstellung läßt sich geltend machen, daß danach die *klare* kristallinische Phase im konvergenten polarisierten Lichte sich nicht wie ein *einachsiger*, sondern wie ein *zweiachsiger* Kristall verhalten müßte. Wenigstens eine Öffnung des Achsenkreuzes zu zwei Hyperbelzweigen bei Drehung des Präparates sollte man erwarten. Wir haben aber eine solche nie beobachtet, auch nicht, als wir unsere Aufmerksamkeit darauf richteten; Vorländer sah sie trotz reichhaltigeren Materials nur in dünnen Schichten bei Spannung und Druck, was ja wohl verständlich ist.

Man könnte den Einwand durch den Hinweis darauf zu entkräften suchen, daß in den verschiedenen Teilen des Präparates die größere Querachse nicht die gleiche Richtung haben wird, so daß das Achsenkreuz nur durch Übereinanderlagerung verschiedener Hyperbeln zustande käme. Dafür scheint uns aber das Achsenkreuz (und auch die Ringe, die ja dann aus Superposition verschieden orientierter Lemniskaten entstehen würden) zu scharf.

Zu gering darf man den Unterschied der „Querachsen“ auch nicht annehmen, denn dann entfällt die Möglichkeit, die Trübung in der *ersten* kristallinischen Phase durch ihre verschiedene Richtung zu erklären.

Man könnte andererseits an die Möglichkeit *verschiedener Raumgitterstrukturen* denken, bei denen die Moleküle zwar

1) Die Theorie in *dieser Fassung* würde übrigens die Möglichkeit von drei und vier anisotropen Phasen (vgl. D. Vorländer, l. c.) nicht erklären.

2) D. Vorländer, l. c. p. 2035.

mit ihrer längsten Dimension parallel, aber in Richtung derselben in verschiedener Weise verschoben sind.<sup>1)</sup>

Diese Annahme *allein* würde aber noch keinen Grund für die Trübung der ersten kristallinisch-flüssigen Phase erkennen lassen.

Man wird wohl nicht umhin können, zur Erklärung dieser Trübung die ausgiebigere Wärmebewegung in der ersten kristallinisch-flüssigen Phase heranzuziehen, welche eine starke Schwankung der Längsachse der Moleküle bedingen wird. In der zweiten kristallinisch-flüssigen Phase wird wegen der niederen Temperatur und der größeren Reibung diese Schwankung geringer sein.

Hierdurch würde zugleich die Verringerung der Doppelbrechung mit ansteigender Temperatur und das Ansteigen des „ordentlichen“ Brechungskoeffizienten der trüben Phase verständlich werden.

Sind durch Temperaturherabsetzung und Steigerung der Reibung die Längsachsen merklich parallel geworden, so wird eine noch weitere Abkühlung keine erhebliche Änderung mehr bedingen. Dem entspricht das Verhalten des ordentlichen Brechungskoeffizienten bei M.Ae.

Bei Ae.Ae läßt sich im Doppelprisma wegen Errstarrens die Ausbildung der zweiten kristallinisch-flüssigen Phase nicht weit verfolgen. Sollte das starke Sinken des ordentlichen Brechungskoeffizienten einer schnell fortschreitenden Parallelrichtung der Moleküle entsprechen?

#### Schluß.

Es ist somit gelungen, die Brechungsverhältnisse der beiden untersuchten Substanzen mit einiger Genauigkeit festzustellen. Soweit nicht eine Änderung der Substanz in Frage kommt, sind die Brechungskoeffizienten der isotropen Phase und des ordentlichen Strahles in den kristallinisch-flüssigen als auf drei Dezimalen richtig zu betrachten — freilich macht bei M.Ae. der starke Einfluß mehrfacher Erwärmung die erreichte Meßgenauigkeit illusorisch.

---

1) E. Bose, Physik. Zeitschr. 10. p. 239. 1909.

Bei den außerordentlichen Brechungskoeffizienten mag der Fehler wenige Einheiten der dritten Dezimale höchstens betragen, was besonders durch die Schwierigkeiten der Dickenmessung bedingt ist.

Die Doppelbrechung der Substanzen ist außerordentlich stark, reichlich doppelt so groß als bei Kalkspat.

Sehr merkwürdig ist die Abhängigkeit der Brechungskoeffizienten von der Temperatur.

Die Substanzen befolgen in der zweiten kristallinisch-flüssigen Phase quantitativ dieselben Gesetze, wie die einschlägigen festen Kristalle. Es ist dies ein weiterer starker Grund gegen die Emulsionstheorie der kristallinischen Flüssigkeiten.

Halle a. S., 7. April 1909.

(Eingegangen 8. April 1909.)

---

*6. Über eine eigenständliche Form  
elektrischen Leitvermögens bei festen Körpern;  
von K. Bädeker.*

1. Bei einer im Jahre 1907 in dieser Zeitschrift veröffentlichten Untersuchung<sup>1)</sup> über die elektrische Leitfähigkeit und die thermoelektrische Kraft einiger Schwermetallverbindungen wurden unter anderen auch einige Zahlen über das Leitvermögen des festen Kupferjodürs — CuJ — angegeben, nach denen diesem durchsichtigen Körper eine auffallend hohe, wie damals angenommen wurde, elektrolytische Leitung zu käme. Des weiteren hatte sich gezeigt, daß die Präparate, Schichten von  $0,2\text{--}0,3 \mu$  Dicke durch Kathodenzerstäubung und darauffolgende Jodierung hergestellt, einer schnellen Alterung unter starker Widerstandsvermehrung unterlagen, die als eine chemische Zersetzung angesprochen wurde. Die genauere Untersuchung dieser eigenständlichen Erscheinungen<sup>2)</sup> führte zu dem Ergebnis, daß das gefundene Leitvermögen doch metallischer Natur ist, und daß es unveränderlich ist, wenn das Präparat dauernd in gesättigtem Joddampf gelassen wird, ja daß es auch nach erfolgter Alterung durch Joddampf zum ursprünglichen Wert regeneriert werden kann.

Diese Beobachtung legte die Vermutung nahe, daß die Entstehung des Leitvermögens mit einer Jodaufnahme verknüpft sei und daß die Größe des Leitvermögens eine Funktion des Joddampfdruckes sein würde. Auch diese beiden Erscheinungen konnten beobachtet und quantitativ untersucht werden (Teil I der folgenden Arbeit). Schließlich wurde die Untersuchung der sonst bei metallischen Leitern beobachteten Erscheinungen in Angriff genommen, und zum Teil, nämlich für die Wirkung der Temperatur auf die Leitung, für den Halleffekt und für die thermoelektrische Kraft bis zu einem gewissen Grade

---

1) K. Bädeker, Ann. d. Phys. 22. p. 749. 1907.

2) Vorläufiger Bericht vgl. Physik. Zeitschr. 9. p. 431. 1908.

durchgeführt (Teil II der folgenden Arbeit). Da alle diese Größen als Funktionen des Jodgehalts auftreten, ist die vollständige Durchführung der Messungen naturgemäß eine umfangreiche Arbeit.

Eine Theorie aller Erscheinungen, die sich wohl nur auf die Elektronentheorie der Metalle stützen könnte, mit mehr als qualitativen Resultaten zu geben, war vorderhand nicht möglich. Zunächst läßt sich noch nichts darüber aussagen, in welcher Form das Jod im festen Kupferjodür aufgenommen wird, ob als  $J_1$ ,  $J_2$ , oder ob es mit dem CuJ eine Verbindung zu Jodid oder Polyjodid eingeht. In letzteren Fällen kann die Verbindung nicht quantitativ erfolgen, sondern muß zu einem durch den Joddampfdruck geregelten Gleichgewicht führen, wobei der gebildete Körper im CuJ gelöst bleibt. Der fragliche Körper seinerseits, den wir mit  $J_a$  bezeichnen wollen, wird die Elektronen abspalten, und dadurch Ursache des Leitvermögens sein. Im Sinne der Elektronentheorie wird man nur die negativen Ladungen als Vermittler der Leitung ansehen, und ihrer Anzahl zunächst das Leitvermögen proportional setzen. Ob es richtig ist anzunehmen, daß die sehr geringe aufgenommene Jodmenge keinen Einfluß auf die mittlere freie Weglänge hat, ist fraglich. Einige Ergebnisse dieser Anschauungsweise, die, wie gesagt, zu einer befriedigenden Darstellung der Beobachtungsresultate noch nicht geführt hat, sollen weiterhin gegeben werden.

#### Erster Teil.

2. Elektrisches Leitvermögen von CuJ in Joddampf. — 3. Wägung der aufgenommenen Jodmenge. — 4. Verhalten in Jodlösungen verschiedener Konzentration. — 5. Versuch einer Theorie. — 6. Verbreitung der Erscheinung. — 7. Die Elektrizitätsleitung ist metallisch. — 8. Versuch über Kontaktpotentialdifferenzen.

2. Zur Untersuchung des elektrischen Leitvermögens wurden Präparate hergestellt, bei denen die Kupferjodürschicht über zwei auf Glas eingearbeiteten Platinelektroden niedergeschlagen war, die einen absolut vollkommenen Kontakt sichern. Die Dimensionen des durchströmten Teiles waren meist etwa von 1 cm Länge und Breite, und  $0,2 - 0,3 \mu$  Dicke. Letztere wurde aus der Interferenzfarbe geschätzt,

wozu der Brechungsindex  $n = 2,0$  nach Mey<sup>1)</sup> benutzt werden kann. Die Widerstandsmessungen erfolgten hier und bei allen späteren Beobachtungen mit Wechselstrom und Telephon. Haben solche Schichten nach der ursprünglichen Jodierung längere Zeit, Wochen, im joddampffreien Raum gelegen, so ist ihr Widerstand sehr groß. Ein bestimmter Wert ist nicht angebar, doch scheint es nicht ausgeschlossen, daß das CuJ in diesem Grenzzustande beinahe ein Isolator ist. Sowie in die Nähe des Präparates ein Jodkorn gebracht wird, tritt sofort ein merkliches Leitvermögen ein. In einem geschlossenen Gefäß, das einige Körner festen Jods enthält, erreicht dieses Leitvermögen asymptotisch ein Maximum. Um den Grenzwert schnell zu erreichen, ist es günstig, die Diffusion des Joddampfes durch weitgehende Evakuierung zu unterstützen. Wird das Präparat dem Joddampf entzogen, so sinkt das Leitvermögen erst schnell, dann langsamer auf beliebig kleine Werte. Läßt man den gesättigten Joddampf wieder einwirken, so erhält man den ursprünglichen Maximalwert des Leitvermögens, vorausgesetzt, daß sorgfältig auf Gleichheit der Temperatur geachtet wird. Ein Präparat das mit Jodkörnern in ein evakuiertes, mit Zuleitungen versehenes Gefäß eingeschmolzen war, erhielt seinen Widerstand anscheinend unbegrenzte Zeit konstant.

Das spezifische Leitvermögen ergibt sich genähert aus folgendem Beispiel: Eine Schicht von CuJ von 1,1 cm Länge, 1,8 cm Breite und  $0,18 \mu = 1,8 \cdot 10^{-5}$  cm Dicke hatte bei  $18^\circ$  im bestleitenden Zustande 500 Ohm. Daraus wird der spezifische Widerstand in Ohm für den cm-Würfel

$$\sigma = \frac{500 \cdot 1,8 \cdot 1,8 \cdot 10^{-5}}{1,1} = 1,08 \cdot 10^2.$$

Dieser Wert hat also statt des früher gegebenen<sup>2)</sup> einzutreten. Daraus folgt das Leitvermögen zu

$$x = 0,93 \cdot 10^2.$$

Eine definitive genauere Bestimmung dieses Wertes soll noch ausgeführt werden. Zum Vergleich können die Werte dienen:

1) A. Mey, Diss. Leipzig 1906.

2) K. Bädeker, Ann. d. Phys. 22. p. 765. 1907.

	$\sigma$	*
Kupfer	0,0000017	600000
Gaskohle	0,0040	250
CuJ <sub>Max.</sub>	0,0108	93
H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> <sub>Max.</sub>	1,35	0,74

3. Die an sich schwach gelbliche Färbung der vollkommen klaren CuJ-Schicht geht im Joddampf in ein helles Braun über. Eine solche Umfärbung lässt sich auch an einem pulverförmigen Präparat feststellen, wo sie sehr auffallend ist. Sie ist mit einer kleinen Gewichtsvermehrung verknüpft, wie folgende Versuche zeigen.

Einige Gramm Kupferjodür von Kahlbaum und etwas Jod wurden in getrennten Gefäßen im Vakuum zusammengebracht. Im Laufe von 2—3 Tagen war dann eine Gewichtsvermehrung des Kupferjodürs eingetreten, welche in einem Falle 3,33 mg, in einem anderen 3,27 mg aufs Gramm betrug. Weitere Wägungen nach längerer Zeit, unter Konstanterhaltung der Umstände, ergaben kleine unregelmäßige Schwankungen von nicht mehr als 1 Proz. der genannten Zunahme. Sie sind wohl durch Temperaturschwankungen hervorgebracht. Wurden die Präparate im judgesättigten Zustande mit Kali zusammen im Vakuum erwärmt, so gaben sie alles Jod ab, und der Versuch ließ sich mit dem gleichen Resultate wiederholen. Die Versuchstemperatur betrug immer ungefähr 18°. Das sehr kleine Verhältnis der aufgenommenen Jodmenge zur Gesamtmenge des Kupferjodürs, und seine Abhängigkeit von der Temperatur, die durch einen späteren Versuch noch sicher gestellt wird (s. Ziffer 10), schließen die Möglichkeit aus, daß eine chemische Reaktion, etwa Jodidbildung, quantitativ eintritt.

4. Um die Konzentration des Jods im Präparat bei konstanter Temperatur zu variieren, wird man zweckmäßigerverweise nicht ungesättigten Joddampf verwenden, sondern Jodlösungen von verschiedener Konzentration. Es mußte ein gegen das CuJ möglichst indifferentes Lösungsmittel gewählt werden: Schwefelkohlenstoff, Chloroform und Benzol wurden geeignet befunden, da alle drei das Jod reichlich und ohne

chemische Umsetzung lösen. Da schon minimale Konzentrationen sich als sehr wirksam erwiesen, selbst solche, an denen eine Jodfärbung noch gar nicht zu bemerken war, wurde, von einer mittleren Konzentration ausgehend (10—50 g Jod pro Liter), in starker geometrischer Progression fortschreitend verdünnt.

In diesen Lösungen wurde das Präparat, an Klammern aus Platin befestigt, eingetaucht und das Ansteigen der Leit-

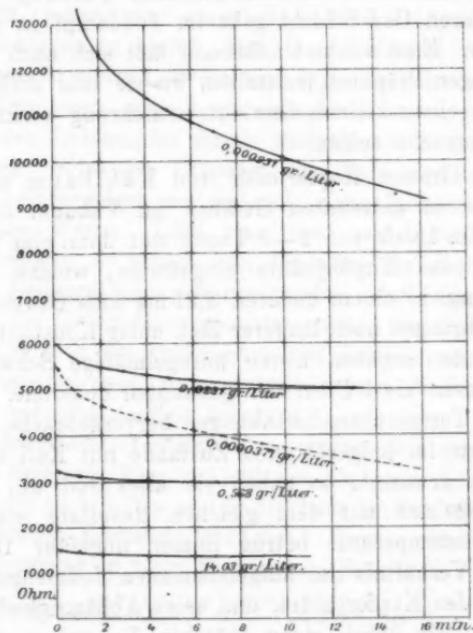


Fig. 1.

fähigkeit jeweils möglichst bis in die Nähe des Grenzwertes abgewartet. Die Untersuchung begann bei den kleinsten Konzentrationswerten, da die Einstellung bei umgekehrter Reihenfolge nicht so schnell erfolgt.

Fig. 1 zeigt den zeitlichen Verlauf der Widerstandsveränderung in Lösungen von Jod in Chloroform. Man sieht, daß die Extrapolation der Grenzwerte, besonders bei kleineren

Konzentrationen, noch eine gewisse Unsicherheit enthält, die durch Einstellung von beiden Seiten her zu beseitigen wäre.

Tab. I gibt die wahrscheinlichen Grenzwiderstände eines Präparates als Funktion der Jodkonzentration des Bades für Chloroformlösungen, Tab. II für Lösungen in Schwefelkohlenstoff.

Tabelle I.  
Chloroformlösungen.

Konzentration in g pro Liter	Grenzwiderstände in Ohm	relative Leitfähigkeiten
0,0000377	25000	0,050
0,000931	8000	0,156
0,0230	4800	0,260
0,568	2850	0,438
14,03	1250	1,000

Tabelle II.  
Schwefelkohlenstofflösungen.

0,00333	9000	0,100
0,0822	5500	0,164
2,026	3400	0,265
50,0	1400	0,642
155 (gesättigt)	900	1,000

Da die Konzentration des Jods im Präparate in einer Badlösung von bestimmter Konzentration beim Gleichgewichtszustand dieselbe sein muß, wie in dem Dampfraum, der mit dieser Lösung im Gleichgewicht ist, so muß bei gesättigter Lösung der Zustand dem bei Berührung mit gesättigtem Dampf entsprechen, d. h. in beiden Fällen müßten die spezifischen Widerstände gleich werden.

5. Die genauere Betrachtung der in Tabb. I und II gegebenen Zahlen zeigt, daß die Leitfähigkeit etwa arithmetisch fortschreitet, wenn die Konzentration in geometrischer Progression wächst; die Leitfähigkeit ist für Tab. I etwa der 4—5<sup>ten</sup>, für Tab. II der 5—6<sup>ten</sup> Wurzel der Konzentration proportional. Es ist also

$$x = \text{cst} \times \sqrt[n]{c}, \quad \text{mithin} \quad \log x = n \log c + \text{cst.}$$

Letztere Beziehung, die in Fig. 2 aus den Zahlen der Tab. I konstruiert ist, lässt sich nun aus den in der Einleitung gegebenen Prinzipien auch annähernd theoretisch herleiten.

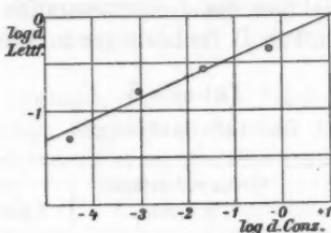


Fig. 2.

Der Körper  $J_a$ , den das Jod im Kupferjodür bildet, spaltet Elektronen ab, und zwar  $v$  pro Molekül. Wir können dann versuchen auf die Gleichung

$$(1) \quad J_a = J_a^+ + v \text{ Elektronen}$$

das Massenwirkungsgesetz anzuwenden.

Bezeichnen wir die Konzentration der Jodmoleküle durch eckige Klammern, die der Elektronen durch  $f^1$ , so erhalten wir

$$(2) \quad \log [J_a] = \log [J_a^+] + v \log f + \text{cst},$$

da jedes  $J_a$ -Molekül  $v$  Elektronen abspaltet, ist weiter

$$(3) \quad [J_a^+] = \frac{f}{v}$$

und schließlich soll die Leitfähigkeit der Elektronenzahl direkt proportional sein, also

$$(4) \quad z = f \times \text{cst.}$$

Unter Zusammenziehung aller Konstanten erhalten wir nun aus (2), (3) und (4)

$$(5) \quad \log [J_a] = (v + 1) \log z + \text{cst.}$$

1) Sind die Konzentrationen in Mol pro Liter gedacht, so gilt, wenn  $e$  die Elementarladung in elektromagnetischen Einheiten und  $N$  die Zahl der Elektronen pro ccm, die Gleichung

$$f = \frac{1000 N \cdot e}{9654}.$$

Ist nun die Konzentration der ungeladenen  $J_a$ -Moleküle (nach dem Verteilungsgesetz) der Jodkonzentration des Bades proportional, so wird auch

$$(6) \quad \log c = (\nu + 1) \log x + \text{est},$$

welche Gleichung identisch ist mit der experimentell abgeleiteten Gleichung (1). Wir würden aus der Beobachtung und Gleichung (6) haben, daß ein Jodmolekül  $\nu = n - 1$ , also 3—5 Elektronen abspaltet, wenn es sich dissoziiert. Man könnte zugunsten dieser Ansicht die Mehrwertigkeit des Jods in seinen Verbindungen mit negativen Elementen, Cl, Br, O, anführen.

Indessen bleiben bei der gegebenen Ableitung eine Reihe Bedenken bestehen, die dieses Resultat als sehr unsicher, oder jedenfalls verbessерungsbedürftig erscheinen lassen. Einmal ist fraglich, auf welchem Molekularzustand,  $J_3$  oder  $J_1$ , die beide in der Badlösung vorhanden sind, der Verteilungssatz anzuwenden ist, solange man über die Molekulargröße des Jods im Kupferjodür nichts weiß. — Zweitens wird statt der direkten Abspaltung der  $\nu$  Elektronen aus dem  $J_a$  der Vorgang in Stufen erfolgen, auf deren jede das Massenwirkungsgesetz anzuwenden wäre. Doch scheint es möglich, daß beide Bedenken auf die allgemeine Form der Gleichung (6) keinen Einfluß haben, sondern wesentlich nur den Koeffizienten  $\nu + 1$  verändern. Da das Beobachtungsmaterial noch zu klein ist, hat es vorderhand keinen Zweck, diese Überlegungen weiter zu verfolgen.

6. Es ist sicher, daß Erscheinungen, wie sie von CuJ unter Einwirkung von Jod in so auffallender Größe auftreten, sich auch bei anderen Stoffen finden werden. Die chemischen Analogien würden dazu Hinweise genug geben. In der Tat konnte ich beim AgJ den Einfluß des Jods auf die Elektrizitätsleitung an ähnlichen Präparaten, wie die des CuJ waren, sicher feststellen, doch bleibt seine Größenordnung weit hinter der des CuJ zurück.

Sehr große Wirkungen erhält man, wenn man Bromdampf,  $\text{NO}_2$  usw., auf CuJ einwirken läßt. Doch sind diese Wirkungen irreversibel, und erklären sich einfach durch Abspaltung des

Jods aus dem Kupferjodür. Solange noch etwas unzersetzte Substanz da ist, ruft das freigewordene Jod in dieser die oben beschriebenen Erscheinungen hervor. Nach kurzer Einwirkung ist nur noch das nichtleitende Bromid oder Nitrat oder dergl. vorhanden.

Von Walden<sup>1)</sup> ist gefunden worden, daß Lösungen von Jod in einigen an sich nichtleitenden Lösungsmitteln, besonders Thionylchlorür,  $\text{SO}_2\text{Cl}_2$ , ein nicht unbeträchtliches Leitvermögen haben, das indes nicht erheblich über  $10^{-4}$  rezipr. Ohm pro ccm hinausgeht. Er hält metallisches Leitvermögen für ausgeschlossen; trotzdem ist es wohl möglich, daß es sich um Analogien zu der oben beschriebenen Erscheinung handelt.

7. Die nächstliegende Frage beim weiteren Studium der Erscheinungen ist die, ob es sich um metallische oder elektrolytische Leitung handelt. Das letztere war früher<sup>2)</sup> angenommen worden, weil man beim Durchleiten eines genügenden Stromes durch Präparate, die wenig freies Jod enthalten, in der Tat an der Kathode eine moosartige Abscheidung, jedenfalls von Kupfer, beobachten kann. Als indes der Vorgang unter dem Mikroskop beobachtet wurde, zeigte sich, daß die Abscheidung stets gleichzeitig mit einer lokalen Schmelzung durch Joulesche Wärme, und nur an den geschmolzenen Stellen eintritt. Für festes Kupferjodür war sie auch bei Stromdichten von 30 und mehr Ampère pro qcm nicht zu bemerken. Ebenfalls konnte bei diesen Stromdichten keine Polarisation von mehr als  $10^{-4}$  Volt am Elektrometer beobachtet werden. Man muß demnach wohl annehmen, daß die Leitung mindestens in ihrem überwiegenden Anteile metallisch erfolgt. Auch die sonst nicht leicht erklärbare Größe des Leitvermögens und das Vorhandensein eines großen Hall-Effektes (s. u.) sprechen dafür.

8. Insbesondere kann als Beweis für diese Ansicht noch die Beobachtung angesehen werden, daß aneinandergrenzende Schichten von CuJ verschiedenen Jodgehaltes das Gesetz der Volotaschen Spannungsreihe erfüllen, d. h. daß durch eine

1) P. Walden, Zeitschr. f. phys. Chem. 43. p. 385. 1903.

2) K. Bädeker, Ann. d. Phys. 22. p. 757. 1907.

Kombination von festem Kupferjodür verschiedenem Jodgehaltes mit metallischen Elektroden kein stromlieferndes Element zusammengesetzt werden kann. Folgender Versuch wurde darüber angestellt. Eine Schicht von CuJ war, wie in Fig. 3 im Querschnitt dargestellt, über zwei Platinelektroden niedergeschlagen. Die eine Hälfte, von *a* bis *b*, war durch ein mit Paraffin aufgeschmolzenes Glimmerblatt hermetisch gegen äußere Einwirkung abgeschlossen. Die andere Hälfte, *b* bis *c*, wurde der Einwirkung von Joddämpfen ausgesetzt, so daß sie sich nach den früheren Beobachtungen in einiger Zeit mit Jod sättigte. Bei dieser Einwirkung wurde keine Potentialdifferenz zwischen

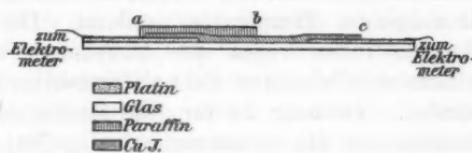


Fig. 3.

den Platinelektroden bemerkt.  $10^{-4}$  Volt hätten mit dem benutzten Elektrometer noch erkannt werden können. Wenn also bei der starken Veränderung des Leitvermögens, die der Jodierung entspricht, eine Kontaktpotentialdifferenz zwischen der jodierten und unjodierten Hälfte des Präparates auftritt, so muß diese gleich und entgegengesetzt der an der Berührungsfläche Pt | CuJ entstehenden sein.

Entgegen diesen aus der Beobachtung genommenen Beweisen für metallische Leitung sollte man es theoretisch für möglich halten, daß mindestens ein kleiner Teil der Elektrizitätsbewegung elektrolytisch erfolgt. Die positiv geladenen Reste des J<sub>a</sub> sollten im elektrischen Feld auch eine, wenn auch kleine Geschwindigkeit annehmen können, da ja das Jod nach verschiedenen vorher angeführten Beobachtungen mit ziemlicher Leichtigkeit durch Kupferjodür diffundiert. Für Silberjodid ist ja dieser Vorgang auch mehrfach sicher festgestellt worden. Durch Beobachtung konnte eine solche Verschiebung des gelösten Jods durch den elektrischen Strom indes noch nicht festgestellt werden.

## Zweiter Teil.

## Die elektrischen Eigenschaften des jodhaltigen Kupferjodürs.

9. u. 10. Der Temperaturkoeffizient des Leitvermögens. — 11. Der Halleffekt. — 12. u. 13. Die thermoelektrische Kraft. — 14. Der Effekt von Arrhenius. — 15. Zusammenfassung.

**9. Der Temperaturkoeffizient des Leitvermögens.** Schon früher<sup>1)</sup> sind für den Temperaturkoeffizienten des elektrischen Widerstandes zwei Zahlen angegeben worden, welche zeigten, daß in gutleitenden Schichten der Widerstand wie bei reinen Metallen mit steigender Temperatur zunimmt. Diese Beobachtungen können indes wegen der Unkenntnis des Jodgehaltes der benutzten Schichten nicht als eindeutige Resultate angesehen werden. Vielmehr ist für jede Beobachtung eines Temperaturkoeffizienten die Jodkonzentration im Präparat festzusetzen und konstant zu erhalten. Während die erstere Forderung durch Eintauchen in eine Badlösung geeigneter Konzentration leicht zu erfüllen wäre, ist es für die letztere bis jetzt noch nicht einwandfrei möglich gewesen.

Erwärmst man nämlich das Präparat mitsamt dem Bade, so wird der Verteilungskoeffizient des Jods zwischen Bad und CuJ eine Temperaturfunktion sein, die Jodkonzentration im Präparat also eine Änderung erfahren, die den eigentlichen Temperatureinfluß auf die Leitung überdeckt. — Daselbe wird der Fall sein, wenn man etwa für den gesättigten Zustand im gesättigten Joddampfe erwärmen wollte (s. Ziffer 10).

Es mußte also die Schicht bei bestimmtem Jodgehalte fixiert werden. Dies gelang einigermaßen dadurch, daß über der Schicht nach Herstellung der gewünschten Jodkonzentration mit wenig leicht schmelzendem Paraffin ein Glimmerblättchen aufgeschmolzen wurde. Die Jodkonzentration eines solchen Präparates ist definiert durch seinen spezifischen Widerstand; am einfachsten wird sie bestimmt, indem man das Verhältnis

1) K. Bädeker, Ann. d. Phys. 22. p. 758. 1907.

seines wirklichen Widerstandes zu dem Widerstande feststellt, der sich vorher beim Eintauchen in eine Jodlösung bekannter Konzentration ergeben hatte. Wir werden den Temperaturkoeffizienten eines CuJ als Funktion dieser charakteristischen Größe  $w/w_c$  angeben.

Das Verfahren hat noch einige wesentliche Nachteile. So tritt bei dem Aufschmelzen der Platte stets mehr oder weniger Jod in das flüssige Paraffin ein, und wenn auch der Widerstand  $w$  erst nach der Abkühlung bestimmt wird, so ist doch sicher bei dem Prozeß nie die ganze Schicht gleichmäßig in Mitleidenschaft gezogen, so daß die Stromverteilung im Präparat ungleichmäßig werden muß. Ferner diffundiert Jod auch merklich in das feste Paraffin hinein, und bei langandauernden Temperaturveränderungen machen sich Änderungen der Jodverteilung als langsame Widerstandsänderungen bemerkbar. Um diese Prozesse möglichst einzuschränken, wurde nur bei tiefen Temperaturen gearbeitet, nämlich zwischen Zimmertemperatur und der Temperatur der festen Kohlensäure. Jedes Präparat wurde in öfterem Wechsel in Bäder dieser beiden Temperaturen getaucht, und aus den gefundenen Widerständen der Temperaturkoeffizient graphisch bestimmt.

Zum Beispiel hatte eine Schicht in einer Lösung von 10 g Jod pro Liter 1037 Ohm. Nach dem Fixieren hatte sie Zimmertemperatur, 3680 Ohm. Es ist also für sie  $w/w_c = 3,55$ . Im Kohlensäure-Äthergemisch ( $-79^\circ$ ) hatte sie 3080 Ohm. Danach hat sie bei  $0^\circ$  interpoliert 3560 Ohm und der Temperaturkoeffizient wird

$$\alpha = \frac{1}{3560} \cdot \frac{600}{97} = +0,00174.$$

Tab. III gibt eine Übersicht über sämtliche so erhaltene Resultate. Wenngleich die einzelnen Zahlen aus den angeführten Gründen nicht zuverlässig sind, so ist doch aus der Gesamtheit mit Sicherheit das Resultat zu entnehmen, daß für große Jodkonzentration der Temperaturkoeffizient „metallisch“ ist, dem Vorzeichen und beinahe auch der Größe nach, während für hohe spezifische Widerstände, also kleine Jodkonzentrationen, das Vorzeichen sich umkehrt.

Tabelle III.

$\frac{w}{w_0}$	Temperaturkoeffizient
1,4	+0,0027
1,5	30
1,8	25
1,9	14
3,5	17
4,4	15
5,6	+0,00015
10,9	-0,00098
12,8	-0,0054
24	-0,0029

10. Es wurden auch einige Beobachtungen gemacht über die Veränderungen des spezifischen Widerstandes, wenn CuJ im dauernd jodgesättigten Raume erwärmt wird. Zu dem Zwecke wurde ein Präparat mit Platinklammern versehen, mit einigen Jodkörnchen in ein evakuiertes Glasrohr eingeschmolzen und im Ölbad erwärmt. Im Gegensatz zu den Beobachtungen bei konstantem *hohem* Jodgehalte nahm hier mit steigender Temperatur der Widerstand stark ab. Dies zeigt mit Sicherheit eine Zunahme der Jodkonzentration mit der Temperatur an. Jod ist bei höherer Temperatur löslicher in CuJ als bei niedriger; Tab. IV gibt die Resultate wieder.

Tabelle IV.

Temperatur	Widerstand	relatives Leitvermögen
20°	2300	1,00
41	1660	1,33
63	1174	1,96
71	1066	2,16
84	1016	2,27
20°	2257	1,02

11. *Der Halleffekt.* Die Erscheinung des Halleffektes gilt als besonderes Kennzeichen der metallischen Leitung, da sie

bei elektrolytischer Leitung wegen der Langsamkeit der Ionenbewegung nicht in beobachtbarer Größenordnung auftreten kann, und auch tatsächlich nie beobachtet worden ist.

Zu seiner Beobachtung bietet die Verwendung sehr dünner Schichten des Leiters den Vorteil, daß man hohe Stromdichten ohne bedenkliche Erwärmung anwenden kann. Naturgemäß ist es nicht rationell, dabei unter eine Dicke der stromführenden Schicht herunterzugehen, bei der der spezifische Widerstand zu wachsen anfängt<sup>1)</sup>, d. h. unter etwa  $0,2-0,3\text{ }\mu$ . In der Tat erwies sich an Kupferjodürschichten von etwa dieser Dicke der Effekt als bequem meßbar.

Die Gestalt der Präparate, die für diesen Zweck hergestellt wurden, ist in Fig. IV wiedergegeben; Primär- und Hallelektroden waren eingearbeitetes Platin. Der Kupferjodürschicht wurde die Gestalt eines Kreuzes gegeben, um breite Elektroden anbringen zu können, und so möglichst kleine Widerstände nach jeder Richtung zu erhalten. Um den Primärstrom möglichst in der Mitte zusammenzuhalten, und um den Ausgleich der Hallspannung an Stellen schwächeren Feldes zu verhindern, war die Schicht in der in der Figur angegebenen Art durch Ritzung mit einer Nadel geteilt. Da so die Bahn des Primär- und des Hallstromes im Präparat ziemlich genau vorgeschrieben ist, ist auch eine Berechnung des Absolutwertes des gesuchten Koeffizienten möglich.

Die Meßmethode war die gewöhnliche mit Gleichstrom unter Kompensation der unbeabsichtigten Querspannung, welche ohne Feld durch unsymmetrische Anbringung der Hallelektroden und ungleiche Primärstromverteilung entsteht. Die Feldmessung geschah mit der Hartmann & Braunschen Wismutspirale und Wheatstonescher Brücke. Der Primärstrom wurde in einem Weston-Milliamperemeter, der Hallstrom mit einem

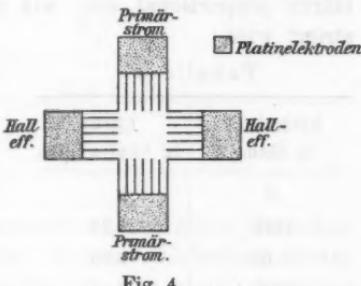


Fig. 4.

1) Patterson. Phil. Mag. (6) 3. p. 643 u. 4. p. 652. 1902.

d'Arsonval-Galvanometer gemessen. Bei dem immerhin großen Widerstande der Schicht konnte ein solches von hohem Widerstande (500 Ohm) verwandt werden. Die Spannungsempfindlichkeit bei gegebenem Stromkreis sollte eigentlich unter Rücksicht auf die eventuelle Widerstandsänderung im Felde bestimmt werden. Da diese jedoch in meßbarer Größe nicht gefunden wurde (unter 0,1 Proz. pro Kilogauss), so konnte diese Komplikation unterbleiben.

Der Bequemlichkeit halber wurde zunächst mit einem wie p. 576 fixiertem Präparat gearbeitet, dessen spezifischer Widerstand, 0,176, etwa das 16fache des Wertes für jodgesättigtes CuJ betrug, der also eine ziemlich geringe Jodkonzentration hatte. Es fand sich, daß der beobachtete Effekt bis 6000 Gauss innerhalb der Fehlergrenzen der Magnetfeldstärke proportional war, wie durch Tab. V und Fig. 5 illustriert wird.

Tabelle V.

Feldstärke in Gauss	Effekt in Skalenteilen
0	0
1540	1,22
3180	2,30
3920	2,84
5860	4,16

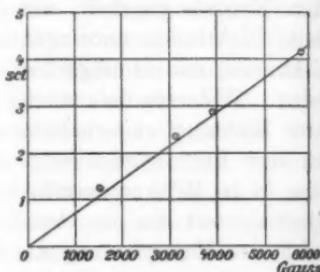


Fig. 5.

Das Vorzeichen des Effektes war positiv nach der gewöhnlichen Bezeichnungsweise, d. h. er hatte den *entgegengesetzten* Sinn wie beim Wismut. Entnehmen wir aus den gewonnenen Daten einen Mittelwert für 1000 Gauss, so können wir den Absolutwert des Hallkoeffizienten  $R$  (mit der Unsicherheit, die der Dickenbestimmung anhaftet) folgendermaßen berechnen. Es ist

$$R = \frac{\text{transvers. elem. Kraft} \times \text{Schichtdicke}}{\text{Feldstärke} \times \text{Primärstrom}}$$

und hierin wurde gefunden bzw. gewählt

die Feldstärke 1000 Gauss . . . . . =  $10^8$  C.G.S.

der Primärstrom  $1,0 \cdot 10^{-4}$  Amp. . . . . =  $10^{-5}$  "

die transversale elektrom. Kraft  $0,249 \cdot 10^{-4}$  Volt =  $0,249 \cdot 10^4$  C.G.S.

die Dicke der Schicht  $0,25 \mu$  . . . . . =  $0,25 \cdot 10^{-4}$  "

damit wird

$$R = \frac{0,249 \cdot 10^4 \cdot 0,25 \cdot 10^{-4}}{10^8 \cdot 10^{-5}} = 6,23 \text{ C.G.S.},$$

also ein ziemlich erheblicher Wert.

Ein Vorversuch am gleichen Präparat, einige Monate vorher, als der spezifische Widerstand noch nicht so weit angestiegen war, hatte 5,78 C.G.S. gegeben. Eine Beobachtung an einem beinahe jodgesättigten Präparat ergab nur 0,24 C.G.S. Diese drei Zahlen mit dem zugehörigen Verhältnis des spezifischen Widerstandes zum Sättigungswiderstand sind in Tab. VI zusammengestellt.

Tabelle VI.

$\frac{w}{w_0}$	R
1,4	0,24
10,6	5,78
16	6,23

Wenngleich diese Zusammenstellung mit allem Vorbehalt gegeben werden muß, so scheint doch mit Sicherheit daraus hervorzugehen, daß der Hallkoeffizient eine starke Funktion der Jodkonzentration ist, wie wohl auch die Elektronentheorie erwarten läßt. Eine vollständige Bearbeitung dieses Problems ist in Angriff genommen.

12. *Die thermoelektrische Kraft.* Eine Bestimmung der thermoelektrischen Kraft des Kupferjodürs wäre darum von Interesse, weil sich aus ihr auf Grund der Anschauungen der Elektronentheorie der metallischen Leitung die Verhältnisse der Elektronenkonzentrationen für die verschiedenen Jodkonzentrationen ergeben würden. Aus den p. 577 angegebenen Gründen war es noch nicht möglich, Präparate zu erhalten, die für variable Temperaturen eindeutige unveränderliche Jodkonzentrationen haben. An sich ist die Größe der thermoelektrischen Kraft leicht festzustellen, da sie, wie bei den meisten Metallverbindungen, erheblich ist. Wegen des von Fall zu Fall sehr verschiedenen inneren Widerstandes dieser

Thermoelemente wurde ein Quadrantenelektrometer (1 mm gleich  $4,5 \cdot 10^{-4}$  Volt) zur Spannungsmessung benutzt.

Für eine Schicht, die an Jod nahe gesättigt war, fand sich zwischen  $0^\circ$  und  $18^\circ$   $1,25 \cdot 10^{-4}$  Volt/Grad. Für eine Schicht mit sehr geringem Jodgehalt fand sich  $3,2 \cdot 10^{-4}$  Volt/Grad. In beiden Fällen wurde das Pt auf der warmen Seite zum negativen Pol.

13. Aus diesem Unterschied zwischen stark und wenig jodiertem Präparat lässt sich eine thermoelektrische Kraft zwischen zwei Kupferjodürschichten verschiedener Jodkonzentration voraussagen, deren Größe gleich ist der Differenz der Kräfte, die jede der Schichten gegenüber ein Paar Elektroden aus beliebigem Metall zeigt. Aus Fig. 6, die einer tatsächlichen Versuchsanordnung entspricht, können wir diese Beziehung wie folgt ableiten.

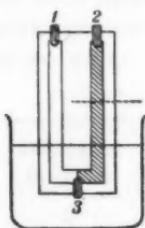


Fig. 6.

1, 2 und 3 seien Platin-Elektroden an den Enden und in der Mitte der hier U-förmig gestalteten Kupferjodürschicht. Die Elektrode 3 tauche mit dem Mittelstück der Schicht in ein auf  $0^\circ$  gehaltenes Bad, während 1 und 2 Zimmer-temperatur haben. Der Schenkel zwischen 1 und 3 habe die geringe Jodkonzentration, der zwischen 2 und 3 sei stärker jodhaltig. Wir werden dann zwischen 1 und 3 wie oben in Nr. 12 eine größere, zwischen 2 und 3 eine kleinere Thermokraft beobachten. Eine Thermokraft gleich der Differenz dieser beiden Kräfte muß zwischen 1 und 2 auftreten.

Nach dem in Ziffer 8 angegebenen Versuche können wir uns nun ohne beobachtbare Wirkung den Teil der Schicht zwischen 2 und der punktierten Linie dieselbe Jodkonzentration wie dem Schenkel 1 und 3 erteilt denken, da in ihm konstante Temperatur herrscht. Die Thermokraft zwischen 2 und 3 bleibt dabei unverändert. Nunmehr ist das ganze aber identisch mit einer Thermosäule, die nur aus Kupferjodür verschiedener Jodkonzentration und Temperatur besteht, da die Elektroden 1 und 2 in jeder Beziehung einander gleich sind. Die kalte „Lötstelle“ wäre bei 3, die warme bei der punktierten Linie.

Ein tatsächlich in dieser Weise angestellter Versuch, mit

einer durch Paraffin fixierten stärker jodierten Stelle zwischen 3 und der punktierten Linie ergab eine Thermokraft

zwischen 1 und 3 von	$1,56 \cdot 10^{-4}$	Volt/Grad
" 2 " 3 "	$1,15 \cdot 10^{-4}$	" "
" 1 " 2 "	$0,42 \cdot 10^{-4}$	" "

während  $0,41 \cdot 10^{-4}$  Volt/Grad als Differenz zwischen den beiden ersten Zahlen zu erwarten war. Ein Thermoelement CuJ schwach jodhaltig | CuJ stark jodhaltig | CuJ schwach jodhaltig hat danach auf der Seite der warmen Lötstelle seinen negativen Pol.

14. *Der Effekt von Arrhenius.* Die Beobachtung, daß durch freies Jod in CuJ ein starkes elektrisches Leitvermögen hervorgerufen wird, gibt einen Hinweis zur Erklärung eines Phänomens, das von Arrhenius zuerst beobachtet, von Scholl<sup>1)</sup> und von W. Wilson<sup>2)</sup> genauer untersucht worden ist, der Tatsache nämlich, daß durch Licht in den Halogensalzen des Silbers eine Erhöhung des Leitvermögens eintritt. In diesen Salzen, denen das CuJ in jeder Beziehung analog ist, bewirkt nämlich das Licht eine Abspaltung von freiem Halogen. Da schon minimale Mengen freien Jods beim CuJ in sehr wirksamer Weise die Leitfähigkeit steigern, so ist anzunehmen, daß mindestens ein Teil des Arrheniusschen Effektes eine Folgeerscheinung des primär photochemischen Vorganges ist. Diese Arrheniussche Leitfähigkeitssteigerung ist nun von Hrn. G. Rudert im hiesigen Laboratorium als auffallend großer und gut beobachtbarer Effekt am CuJ aufgefunden worden, wodurch die ausgesprochene Ansicht bestätigt wird. Seine näheren Resultate sollen demnächst in dieser Zeitschrift veröffentlicht werden.

15. *Zusammenfassung der Resultate.* Die vorliegende Arbeit stellt die Tatsache fest, daß CuJ, AgJ und jedenfalls auch andere Körper durch Aufnahme einer kleinen Menge Jod zu Elektrizitätsleitern gemacht werden können. Diese Wirkung, die bei CuJ besonders groß ist, läßt sich in weitgehendem Maße abstufen durch Variation der Jodkonzentration.

1) H. Scholl, Ann. d. Phys. 16. p. 193, 417. 1905.

2) W. Wilson, Ann. d. Phys. 23. p. 107. 1907.

Die entstehende Elektrizitätsleitung ist metallisch. Es wurde die Wirkung der Temperatur auf sie festgestellt. Ferner wurde der Halleffekt in einigen Fällen gemessen. Er hat entgegengesetztes Vorzeichen wie bei Wismut. Die Einwirkung eines Magnetfeldes auf den spezifischen Widerstand ist klein, jedenfalls unter 0,1 Proz. pro 1000 Gauss.

Die Größe der thermoelektrischen Kraft gegen Metalle wurde festgestellt, eine besondere Klasse thermoelektrischer Kräfte, zwischen Kupferjodürschichten verschiedenen Jodgehaltes, bemerkt.

Es wird eine Erklärung der von Arrhenius beobachteten Wirkung des Lichtes auf den spezifischen Widerstand der Halogensalze des Silbers gegeben.

Jena, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 15. April 1909.)

7. Eine neue Methode  
zur Bestimmung der Dispersion von Metallen;  
von A. L. Bernoulli.

1. Kritik und Geschichte der bisher benutzten Methoden.

Man pflegt in der Lehre von der Reflexion des Lichtes zwei Fälle scharf zu unterscheiden: Glasreflexion und Metallreflexion. Dieselbe Unterscheidung machen wir beim Problem der Brechung. Das erste Medium, welches das Licht durchläuft, sei in beiden Fällen die Luft. Reflektiert und bricht das zweite Medium in der Art wie Glas, so lehrt die Erfahrung, daß bei gegebener Wellenlänge die Kenntnisse einer einzigen für das zweite Mittel charakteristischen Konstanten für die Berechnung aller beobachteten Erscheinungen ausreicht. Anders bei der Metallreflexion. Hier müssen uns zwei Konstante gegeben sein, selbst wenn das zweite Medium als optisch isotrop vorausgesetzt wurde.

Im Fall der Glasreflexion gelten die ursprünglichen Maxwell'schen Gleichungen. Ist dagegen das zweite Medium ein unvollkommener Isolator, so haben wir neben den Verschiebungsströmen auch die Leitungsströme zu berücksichtigen. Für letztere gilt unter allen Umständen das Ohmsche Gesetz und somit auch das Gesetz von Joule. Es wird somit ein beträchtlicher Teil der elektrischen Energie als Wärme verloren gehen; wir haben somit eine starke Absorption des Lichtes zu erwarten. Der Absorptionsindex für eine gegebene Wellenlänge wird in bekannter Weise durch die Festsetzung definiert, daß ein monochromatischer Lichtstrahl im zweiten Medium nach dem Durchlaufen einer Strecke von der Wellenlänge  $\lambda$  derart absorbiert werde, daß seine Amplitude vom Betrage  $A$  auf den Wert  $A e^{-2\pi n}$  verkleinert worden sei.

Die Erfahrung lehrt in Übereinstimmung mit den so erweiterten Maxwell-Hertz'schen Gleichungen, daß für Reflexion

---

1) P. Drude, Lehrbuch der Optik p. 333. Leipzig 1900.

an einem isotropen Leiter unter allen Umständen *zwei* von einander unabhängige charakteristische Größen maßgebend sind.

Nichts erscheint einfacher, als die beiden Konstanten, den Brechungsindex  $\nu$  und den Absorptionsindex  $\alpha$  an dünnen durchsichtigen Metallschichten zu bestimmen. Derartige Messungen geben aber wegen der Kleinheit der Prismenwinkel (ca. 1°) nur wenig genaue Resultate.<sup>1)</sup> Das Produkt  $\nu \cdot \alpha$  läßt sich dagegen photometrisch relativ genau auswerten und kann durch Kombination, entweder mit dem photometrisch ermittelten Reflexionsvermögen oder mit Prismenbeobachtungen beide Konstanten liefern. Die Werte der Brechungsindizes stimmen leider nur dem Sinne der Dispersion und der Größenordnung nach mit den auf anderem Wege ermittelten Werten überein. Es bleiben somit nur diejenigen Methoden, welche auf der Messung der Konstanten der elliptischen Polarisation beruhen.

Die Methode, welche Jamin<sup>2)</sup> und später Walter<sup>3)</sup> und ebenso auch Pflüger<sup>4)</sup> anwandten, war die folgende. Linearpolarisiertes Licht von 45° Azimut gegen die Reflexionsebene wurde nacheinander an zwei unter sich parallelen Metallspiegeln unter variablem Einfallswinkel zur Reflexion gebracht. Die Lage des gesuchten Haupteinfallswinkels wurde daran erkannt, daß für ihn das Licht nach zweimaliger Reflexion wieder linear polarisiert war, sich also durch einen Nicol vollständig auslöschen ließ. Die beiden anderen seither angewandten Methoden beruhen beide darauf, die bei der Reflexion an nur *einem* Metallspiegel entstandene Phasenverschiebung zwischen den beiden Normalkomponenten (in der Reflexionsebene und senkrecht dazu) mit Hilfe von Interferenzen zu messen.

Quincke und später Drude benutzten hierzu den Babinettschen Kompensator, dessen Interferenzstreifensystem bei der Reflexion proportional der relativen Phasenverschiebung verschoben wird. Die Lage des Azimuts entspricht derjenigen Stellung des Nicols, bei welcher die Streifen möglichst dunkel

1) Vgl. P. Drude in Winkelmanns Handbuch der Physik. II. Aufl. 6. p. 1308.

2) J. Jamin, Ann. d. chim. et phys. 19. p. 296. 1847.

3) B. Walter, Die Oberflächen- oder Schillerfarben. Braunschweig 1895; Wied. Ann. 57. p. 394. 1896.

4) A. Pflüger, Wied. Ann. 56. p. 424. 1895.

erscheinen. Es ist somit streng genommen noch eine photometrische Messung notwendig.

Voigt<sup>1)</sup> ersetzte die skalare Verschiebung der Interferenzstreifen durch die *vektorielle* Verschiebung eines Punktgitters, wodurch die photometrische Auswertung des Hauptazimuts sich erübrigte. Voigts Schüler Minor<sup>2)</sup> hat nach dieser Methode die Dispersion der vier Metalle Co, Cu, Ag und Stahl bestimmt und als erster bis ins ultraviolette Gebiet verfolgt. Seine Messungen sind die einzigen genauen Dispersionsmessungen auch im sichtbaren Teil des Spektrums, da Quinckes Messungen, durch akzidentelle Oberflächenschichten in ihren absoluten Werten vielfach entstellt sind, und weil ferner Drude sich auf Messungen mit Natriumlicht und mit einem leider schlecht definierten roten Licht (Rubin-gas) beschränkt hat.<sup>3)</sup>

## 2. Eine neue Methode zur Bestimmung der Dispersion der Metalle.

Eine genauere Kenntnis der optischen Konstanten möglichst vieler Metalle und für möglichst verschiedene Wellenlängen erscheint wünschenswert, namentlich in Hinblick auf den weiteren Ausbau der Elektronentheorie der Metalle.

Geeignete Apparate, um die Messungen von Minor fortzusetzen, standen mir nicht zur Verfügung. Überhaupt schien es mir als erstrebenswertes Ziel, eine Präzisionsmethode zu finden, welche es erlaubt, die teuren und in der Funktion von so vielen Zufällen abhängigen Kristallinterferenzapparate ganz aus dem Spiel zu lassen.

Ich hatte früher einen Babinettschen Kompensator benutzt, um damit die Konstanten des Chroms für die D-Linie zu bestimmen, bei verschiedenen elektromotorischen Zuständen des Spiegels<sup>4)</sup> und habe dabei die verschiedenen Ausführungs-methoden der Quincke-Drudeschen Methode aus eigener Anwendung kennen gelernt. Drei wesentliche Nachteile

1) W. Voigt, Physik. Zeitschr. 2. p. 303. 1901.

2) R. S. Minor, Ann. d. Phys. 10. p. 581. 1903.

3) P. Drude, Wied. Ann. 39. p. 548. 1891 und 36. p. 885. 1889.

4) A. L. Bernoulli, Münchener Diss. 1904 (Fock, Leipzig) und Physik. Zeitschr. 5. p. 632. 1904.

scheinen dem Kompensator anzuhaften: Der starke Lichtverlust durch partielle Reflexion an den Hypotenusenflächen der Quarzkeile, die relativ unsichere Ermittelung der maximalen Dunkelheit der Streifen und das Schlimmste: die Veränderlichkeit der Abstände der Streifen. Diese Inkonstanz kann von Schraubenfehlern, vom toten Gang der Schraube oder davon herrühren, daß die Keilflächen nicht absolut plan sind. Beim Voigt-Minorschen Apparate sind natürlich die Verluste durch Reflexion noch viel größer, da derselbe mit vier Quarzkeilen armiert ist. Der Hauptgrund, welcher die Methode von Quincke zur Ermittelung der optischen Konstanten der Metalle für rotes Licht und noch mehr für dunkelgrünes, blaues oder gar violettes Licht ungeeignet macht, ist ein rein *physiologischer*. Bei Messungen mit dem Babinetischen Kompensator bei monochromatischem Licht erblickt der Beobachter ein schwarzes Streifensystem auf *hellem Grunde*, dessen Farbe mit derjenigen des angewandten Lichtes übereinstimmt. Schwarze Streifen auf gelbem oder gelbgrünem Grunde lassen sich relativ leicht auf maximale relative Dunkelheit einstellen. Fast unlösbar wird dieselbe Aufgabe für das menschliche Auge bei Streifen auf dunkelrotem, blauem oder gar violettem Grunde.

Die relative Empfindlichkeit des Auges für die Abschätzung der Intensität *gleichfarbiger*, aber ungleich heller Flächen ist dagegen in allen Teilen des sichtbaren Spektrums eine sehr große. Der Lippichsche Halbschattenapparat, welcher zwei getrennte Felder linearpolarisierten Lichtes von etwas verschiedenem Azimut mit Hilfe eines analysierenden Nicols auf gleiche Helligkeit einstellt, gestattet die Symmetrieebene der Polarisationsebenen beider Polarisatoren mit großer Genauigkeit in jedem Teil des sichtbaren Spektrums auszuwerten. Dieser Apparat gibt für rotes oder violettes Licht ebenso genaue Resultate, wie für gelb, da es sich ja nur um Helligkeitsdifferenzen gleichgefärbter Flächen handelt.

Dieses Halbschattenprinzip suchte ich für die Messung der optischen Konstanten nutzbar zu machen. Dasselbe würde sich selbstredend auf die Brewster-Jaminsche Zweispiegelmethode anwenden lassen, dagegen hat die Kombination des Halbschattenprinzips mit dem Babinetischen Kompensator,

d. h. die Erzeugung zweier gegeneinander verschobener Streifen-systeme und deren Einstellung auf gleiche relative Helligkeit wenig Zweck wegen des störenden hellen Grundes.

Bei allen bisher angewandten Methoden beruht das Grundprinzip der Messung darauf, denjenigen Reflexionswinkel zu finden, für welchen die Phasenverschiebung gleich  $\pi/2$  wird, wo also das reflektierte Licht zirkular polarisiert ist. Der so ermittelte Haupteinfallsinkel hat aber noch eine andere charakteristische Eigenschaft: *Das Azimut der wiederhergestellten (linearen) Polarisation ist für den Haupteinfallsinkel ein ausgesprochenes Minimum.*

Aus den Quinckeschen Näherungsformeln<sup>1)</sup>, welche im sichtbaren Teil des Spektrums für alle bis jetzt untersuchten Metalle ausreichen, lässt sich diese Tatsache direkt ablesen. Bedeutet  $\psi$  das zum Winkel  $\varphi$  gehörige Azimut,  $\bar{\varphi}$  das Hauptazimut, d. h. das Azimut für denjenigen Einfallsinkel  $\varphi$ , für welchen das reflektierte Licht statt elliptisch, gerade zirkular polarisiert ist, also für den Haupteinfallsinkel  $\varphi = \bar{\varphi}$ .

Nach Quincke wird für jeden Einfallsinkel

$$\cos 2\psi = \cos 2\bar{\varphi} \cdot \sin \left( \frac{2 \operatorname{arctg} \sin \bar{\varphi} \operatorname{tg} \bar{\varphi}}{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi} \right).$$

Der Kosinus von  $2\psi$  wird ein Maximum für  $\varphi = \bar{\varphi}$ , folglich ist das Azimut  $\varphi$  ein Minimum beim Haupteinfallsinkel.

Sehr viel anschaulicher ergibt sich das Hauptazimut als „Minimalazimut“ aus den Drudeschen Näherungsformeln. Sei  $x$  der Absorptionsindex und  $\psi$  das zu einem Einfallsinkel  $\varphi$  gehörige Azimut, so ist

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{x}{\sin \varphi}.$$

Wird das Licht unter dem Haupteinfallsinkel  $\bar{\varphi}$  reflektiert, so wird die relative Phasendifferenz  $\Delta = \pi/2$  und  $\sin \Delta = 1$ .

Es wird also  $\operatorname{tg} \psi$  und somit auch  $\psi$  ein Minimum, da der Nenner der rechten Seite der Drudeschen Gleichung ein Maximum wird.

1) P. Drude, Winkelmanns Handbuch 6. p. 1901 und Lehrbuch der Optik p. 335.

Die neue hier angewandte Methode geht zunächst darauf aus, für eine Reihe von Einfallswinkeln das zugehörige Azimut zu messen. *Derjenige Einfallswinkel, dessen Azimut ein Minimum wird, ergibt sich daraus als Haupteinfallswinkel, das zugehörige Azimut als Hauptazimut.* Mit Hilfe des Halbschattenapparates von Lippich können die Azimute sehr genau ausgewertet werden. Um die Azimute überhaupt messen zu können, muß dem reflektierten Licht noch eine Phasenverschiebung von einer Viertelwellenlänge gegeben werden. Ich habe dazu ein Fresnelsches Parallelepiped benutzt, welches zwischen Spiegel und Analysator eingeschaltet wurde.

Zu erwähnen ist noch das Folgende. Durch die Verwendung eines astronomischen Fernrohres ergibt sich zwar das Hauptazimut richtig, dagegen jedes andere Azimut  $\psi = \bar{\psi} + a$  erscheint als  $\psi' = \bar{\psi} - a$ , d. h. zeichnet man die am Nicol abgelesenen Werte in ebenen rechtwinkligen Koordinaten, so erhält man das Spiegelbild der gesuchten Kurve der Azimute, und zwar gespiegelt an der Geraden  $\psi = \bar{\psi}$ .

Wesentlich ist noch der folgende Punkt: Ein Fresnel'sches Prisma gibt zwar die gewünschte Phasenverschiebung nur für eine ganz bestimmte Wellenlänge *genau* richtig.<sup>1)</sup> Ist  $\beta$  der Winkel des Parallelepipeds, welcher bei einmaliger Reflexion eine Phasenverschiebung von einem Achtel, bei zweimaliger Reflexion eine solche von einem Viertel Wellenlänge erzeugt, so bestimmt sich  $\beta$  als Funktion des Brechungsexponenten des Glases aus der Relation<sup>2)</sup>

$$\sin^4 \beta - \frac{\nu^2 + 1}{2 \nu^2} \sin^2 \beta + \frac{1}{2 \nu^2} = 0.$$

Wegen der geringen Dispersion von  $\sin \beta$  und noch mehr, weil  $(\nu^2 + 1)/\nu^2$  sehr nahe unabhängig von der Wellenlänge ist, darf somit ein Parallelepiped, welches z. B. für Natriumlicht richtig ist, unbedenklich für alle Wellenlängen des sichtbaren Teiles des Spektrums benutzt werden.

Als Lichtquelle diente mir eine Quarzglas-Quecksilberlampe von Heraeus. Das Licht derselben wurde mit Hilfe eines ersten Spektrometers, dessen Tischchen die Nachbildung

1) P. Drude, Optik p. 277.

2) G. Jäger, Theoret. Physik 2. p. 84. Leipzig 1905. III. Aufl.

eines Rowlandschen Plangitters trug, spektral zerlegt. Das parallele monochromatische Licht passierte einen Lippischen Halbschattenapparat von Schmitt und Haensch, welcher auf dem einen festen Arm eines großen Spektrometers montiert war. Das Fernrohr dieses zweiten Spektrometers trug einen Analysator, dessen Positions Kreis eine Minute abzulesen erlaubte, sowie ein Fresnelsches Parallelepiped. Zum Vertikalstellen der auf dem Tischchen des Spektrometers angebrachten Metallspiegel diente eine Fuessche Zentriervorrichtung und ein zweites festes Fernrohr.

Zunächst wurde der Einfallswinkel von  $\frac{1}{2}$  zu  $\frac{1}{2}$  Grad variiert und jeweils 3—4 mal das Azimut abgelesen. Die einzelnen Ablesungen lagen in der Regel nicht mehr als 10 im Maximum etwa 30 Bogenminuten auseinander, die Mittelwerte dagegen lagen nicht mehr als eine Minute auseinander. Aus einer solchen Stammreihe ergab sich die genaue Lage des Maximums dadurch, daß in der Nähe eines so ermittelten vorläufigen Maximums des Azimuts der Reflexionswinkel um kleinere Beträge variiert wurde. Der Reflexionswinkel mit dem größten überhaupt beobachteten Azimut wurde als Haupteinfallswinkel, das zugehörige Azimut als Hauptazimut angenommen. Daß an Stelle der Kurve der Azimute ihr Spiegelbild — also Maximum statt Minimum — auftritt, infolge der Umkehrung des Bildes, wurde bereits erwähnt.

Die Einstellung der Nullage der Nicols und die Ermittlung des Hauptazimuts aus der Einstellung auf gleiche Helligkeit der Halbschattenfelder geschah in folgender Weise. Zunächst wurde der Polarisator entfernt und auf dem Tischchen des Spektrometers ein Flintglasprisma so orientiert, daß das unpolarisierte parallele Licht der gelben Quecksilberlinie unter demjenigen Polarisationswinkel des Flintglasprismas reflektiert wurde, wie er sich aus dem Brechungsindex des Flintglasprismas für gelbes Quecksilberlicht ergab. Dieses durch Reflexion am Prisma fast ganz in der Reflexionsebene polarisierte Licht wurde mit dem Analysator ausgelöscht, und so die Nulllage des letzteren ermittelt. Der Analysator wurde hierauf durch Drehung um  $45^\circ$  auf  $+45^\circ$  Azimut gegen die Reflexionsebene eingestellt. Nach Wegnahme des Flintglasprismas wurde der Polarisator wieder an seine Stelle gebracht und seine

beiden Nicols mit Hilfe des Analysators auf  $45^\circ$  Azimut gebracht.

Der Polarisator selbst bestand aus einem Lippichschen Polarisator mit dreiteiligem Gesichtsfeld und meßbar variablem Halbschattenwinkel; derselbe war einem Saccharimeter von Schmitt und Haensch entnommen worden. Nachdem der dem Spektrometer beigegebene Polarisator aus seinem Positions-kreis entfernt war, wurde der erwähnte Halbschattenpolarisator in dem erwähnten Positions-kreis am Kollimatorrohr des zweiten Spektrometers befestigt. Dadurch wurde erreicht, daß einerseits der *ganze* Halbschattenapparat um beliebige meßbare Beträge gegen die Reflexionsebene gedreht, während außerdem auch noch der Halbschattenwinkel meßbar geändert werden konnte. Der Kollimatorspalt wurde entfernt, um dem durch das erste Spektrometer parallel gemachten Lichte den Durchtritt zu gestatten. Die schwache Konvexlinse, welche im Saccharimeter die Strahlen zwingt, die um einen kleinen Winkel geneigten Hilfsnicks senkrecht zu durchsetzen, wurde mitbenutzt.

Die Optik des Beobachtungsfernrohres war gleichfalls dem erwähnten Halbschatten-Saccharimeter entnommen. Da die Benutzung eines Fadenkreuzes die Einstellung der Felder auf gleiche Helligkeit erschwert hätte, wurden statt dessen zwei feine parallele Platindrähte (0,005 mm) auf der Okularblende befestigt. Ihr Abstand wurde so gewählt, daß die beiden Drähte das kreisrunde Halbschattenbild rechts und links tangierten. Dadurch wurde erreicht, daß die geometrische Einstellung für  $\varphi$  und die photometrische Einstellung für  $\psi$  völlig unabhängig voneinander wurden.

Bei sämtlichen hier mitgeteilten Messungen wurde ein Halbschattenwinkel von  $10^\circ$  benutzt. Für gelbes und grünes Licht würde man auch mit einem weit kleineren Halbschattenwinkel auskommen. Für die extremen Teile des sichtbaren Gebietes dagegen litt die Genauigkeit der Einstellung stark, wenn der Halbschattenwinkel wesentlich kleiner gewählt wurde.

Das Azimut des Halbschattens wurde zu  $39^\circ 46'$  bestimmt, wenn der Hauptnicol (Mittelfeld der dreiteiligen Gesichtsfelder) auf  $+35^\circ$  Azimut und die beiden Hilfsnicks auf  $+45^\circ$  Azimut standen.

3. Die Bestimmung von Hauptazimut und Haupteinfallswinkel aus den beobachteten Minimalazimut.

Um die Genauigkeit der Methode zu prüfen, wurden zunächst die Konstanten für *Silber* bei monochromatischem Licht bestimmt und zwar für die gelbe Quecksilberlinie. Der Silberspiegel wurde aus einem Stück *gegossenen Feinsilber* hergestellt. Der daraus hergestellte Spiegel hatte eine rechteckige Form und zwar 9 mm zu 18 mm. Die längere Seite des Rechteckes wurde parallel zur Reflexionsebene orientiert. Tab. 1 gibt die scheinbaren Azimute  $\psi' = \bar{\psi} - \alpha$  und die wahren Azimute  $\psi = \bar{\psi} + \alpha$ , sowie die zugehörigen doppelten Einfallswinkel  $2\varphi$ .

Tabelle 1.  
Silber.  $\lambda = 578$ . Hg-Gelb.

$2\varphi$	$\psi' = \bar{\psi} - \alpha$	$\psi = \bar{\psi} + \alpha$
152°00'	41°42'	45°32'
151 30	42 35	44 39
151 20	43 03	44 11
151 15	43 30	43 44
151 12	43 37	43 37
151 08	43 06	44 08
151 00	42 18	44 56
150 30	41 23	45 51
150 00	41 25	45 49

$$\bar{\psi}_{\text{Gelb}} = 75^\circ 36', \quad \bar{\psi}_{\text{Gelb}} = 43^\circ 37'.$$

Das Maximalazimut  $43^\circ 37'$  korrespondiert mit dem Einfallswinkel  $\varphi = 75^\circ 36'$ , also ist der Haupteinfallswinkel  $\bar{\varphi} = 75^\circ 36'$ . Drude hat für Natriumlicht  $\bar{\varphi} = 75^\circ 42'$  gefunden. Entsprechend dem Gang der Dispersion muß  $\bar{\varphi}$  für die gelbe Quecksilberlinie um einige Minuten kleiner sein, als für die gelbe Natriumlinie.

Die hier angegebenen Azimute sind die zu  $45^\circ$  ergänzten Drehungen der Halbschattenebene gegen deren Nullage. So ergab sich z. B. für das zum Haupteinfallswinkel gehörige Azimut die Drehung zu  $1^\circ 23'$ , woraus  $\bar{\psi} = 45^\circ - 1^\circ 23' = 43^\circ 37'$ . Drude fand  $\bar{\psi} = 43^\circ 35'$  für Natriumlicht. Die Übereinstimmung beider Werte ist somit eine sehr gute.

Daß die hier gewählte Art der Berechnung von  $\bar{\psi}$  aus den Beobachtungsdaten erlaubt ist, läßt sich auf folgende Art zeigen.

Sei  $90^\circ + z$  die Position des Analysators, welcher die beiden Felder auf gleiche Dunkelheit bringt, so ist  $z$  das Azimut der Resultante beider Felder. Das gesuchte Hauptazimut sei  $\bar{\psi}$ .

Der Winkel  $\varepsilon$ , welcher die Auslösungsrichtung der beiden Halbschattenfelder vor der Reflexion am Spiegel mit dem Azimut  $45^\circ$  einschließt, sei vorher empirisch ermittelt worden. Bei  $10^\circ$  Halbschatten war  $\varepsilon = 45^\circ - 39^\circ 46' = 5^\circ 14'$  (vgl. oben). Unsere Berechnung ist erlaubt, wenn mit hinreichender Annäherung  $\bar{\psi} - z = \varepsilon$ , d. h. wenn die relative Drehung der Halbschattenresultante, also ihr Winkel  $(45^\circ - \varepsilon) - z$  mit genügender Annäherung gleich  $45^\circ - \bar{\psi}$  gesetzt werden darf. Bei großem  $\bar{\psi}$  (z. B. Silber) und kleinem  $\varepsilon$  ist mit guter Annäherung

$$(1) \quad \operatorname{tg} \bar{\psi} = \operatorname{tg} (45^\circ + \varepsilon) \cdot \operatorname{tg} z.$$

Für kleine Werte von  $\bar{\psi}$ , wie sie gerade bei den hier gewählten Metallen *Stahl* und *Nickel* auftreten, genügt die Näherung (1) nicht.

Strenge Formeln gewinnt man durch die folgende Schlußweise. Wir denken uns zunächst das lineare Licht beider Felder von der Reflexion ersetzt durch ein Feld linearer Strahlen vom Azimut  $(45^\circ - \varepsilon)$ . Diese Resultante denken wir uns weiter zerlegt in zwei Strahlenbündel, deren eines unter  $+45^\circ$ , das andere naturgemäß weit schwächere unter  $-45^\circ$  gegen die Reflexionsebene polarisiert sei. Lassen wir diese zwei Bündel unter dem *Hauptfallswinkel* am Spiegel reflektieren, so ist das eine Feld rechts, das andere links zirkular polarisiert. Passieren weiter beide Strahlungsbündel das Fresnel'sche Parallelepiped, so werden beide wieder linear polarisiert, aber die beiden Polarisationsebenen schließen jetzt anstatt eines Winkels von  $90^\circ$  nur einen solchen vom Betrage  $2\bar{\psi}$  ein; da die Polarisationsebenen beider Komponente nach der Reflexion um den Betrag  $(45^\circ - \psi)$  gegen die Reflexionsebene hin gedreht erscheinen. Sei  $r_1$  die große unter  $+\psi$  und  $r_2$

die kleine unter  $-\psi$  polarisierte Komponente, so ergibt der Sinussatz für das Verhältnis  $H$  der beiden Amplituden

$$(2) \quad H = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\sin(\psi - z)}{\sin(\psi + z)}.$$

Dabei ist  $z$  das der Beobachtung direkt zugängliche Azimut der Resultante, d. h. der Diagonale des Parallelogramms  $(r_1, r_2)$ . Gleichung (2) lässt sich auch schreiben als

$$(2a) \quad \operatorname{tg} \bar{\psi} = \frac{1+H}{1-H} \cdot \operatorname{tg} z.$$

Wir wollen nun noch eine Beziehung ableiten, welche gestattet, diese Größe  $H$  durch das genau bekannte  $\epsilon$  und ein *genähertes* Azimut auszudrücken. Zu diesem Zweck wollen wir die resultierende Amplitude  $R$  zerlegen in zwei Komponenten  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$ , welche unter  $+\bar{\psi}$  bzw. vertikal dazu unter  $(90^\circ - \bar{\psi})$  polarisiert sein sollen, somit

$$(3) \quad \begin{cases} \varrho_1 = R \cdot \cos(\bar{\psi} - z), \\ \varrho_2 = R \cdot \sin(\bar{\psi} - z), \end{cases}$$

$\varrho_1$  und  $\varrho_2$  sind also die Seiten desjenigen Rechteckes, welches mit dem Parallelogramm  $(r_1, r_2, 2\bar{\psi})$  die gleiche Diagonale  $R$  hat. Nun ist ferner:

$$r_2 = \frac{\varrho_2}{\sin 2\bar{\psi}} = \frac{R \sin(\bar{\psi} - z)}{\sin 2\bar{\psi}},$$

$$r_1 = \varrho_1 - r_2 \cdot \cos 2\bar{\psi} = R \cdot \cos(\bar{\psi} - z) \{1 - \operatorname{tg}(\bar{\psi} - z) \cdot \operatorname{cotg} 2\bar{\psi}\},$$

woraus

$$(3) \quad H = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\operatorname{tg} \bar{\psi} - z}{\sin 2\bar{\psi} (1 - \operatorname{tg}(\bar{\psi} - z) \cdot \operatorname{cotg} 2\bar{\psi})}.$$

Ist unsere Annahme  $\bar{\psi} = z + \epsilon$  streng richtig, so ist

$$(4) \quad H = \frac{\operatorname{tg} \epsilon}{\sin 2(x + \epsilon) \{1 - \operatorname{tg} \epsilon \cdot \operatorname{cotg} 2(x + \epsilon)\}} = h \operatorname{tg} \epsilon$$

und Gleichung (2a) geht über in

$$(2b) \quad \operatorname{tg} \bar{\psi} = \frac{1 + h \operatorname{tg} \epsilon}{1 - h \operatorname{tg} \epsilon} \cdot \operatorname{tg} z.$$

Für Silber ist nach Drude  $2\bar{\psi} = 87^\circ 10'$ , nach unseren Messungen sehr nahe identisch damit  $2\bar{\psi} = 87^\circ 14'$ . Der Nenner wird also in Gleichung (3) sehr nahe gleich der Einheit und (2b) geht über in

$$\operatorname{tg} \bar{\psi} = \operatorname{tg}(45^\circ + \epsilon) \cdot \operatorname{tg} z.$$

Dagegen ergibt sich das Hauptazimut  $\psi$  z. B. bei Nickel und bei Stahl für gelbes Licht wie folgt aus meinen Beobachtungen.

	$\psi$ berechnet nach Gl. (2b)	$\psi$ durch Differenzbildung
Silber . . . .	43° 36' 58"	43° 37'
Nickel . . . .	31 39 58	31 40
Stahl . . . .	27 33 00	27 33

Da somit der Fehler durch die Berechnung auf Grund der Relation  $\psi - z = \varepsilon$  höchstens  $1/_{50}$  von dem wahrscheinlichen Messungsfehler beträgt, ist die direkte Berechnung durch Bildung der Differenz unbedingt erlaubt.

#### 4. Die optischen Konstanten des Elektrolyt-Nickels und des gehärteten Stahls.

Genaue Dispersionsmessungen für die Metalle Kobalt, Kupfer und Silber, sowie für Stahl, verdanken wir Minor. Dagegen liegen zur Zeit für Nickel außer den Messungen von Drude (D-Linie und „Rubinglas“) keine Polarisationsbestimmungen vor. Es schien mir interessant, solche auszuführen, weil gerade für Nickel zahlreiche Prismenbeobachtungen (Kundt, Pflüger), sowie die ausgedehnten direkten Bestimmungen des Reflexionsvermögens (Hagen und Rubens) vorliegen. Zur Gewinnung eines geeigneten Nickelspiegels wurde aus reinstem Nickelsulfat Nickel auf einen gut polierten Kupferspiegel in starker Schicht elektrolytisch niedergeschlagen. Das Schleifen des Spiegels besorgte Hr. Institutsmechaniker Feldhausen. Vorsichtshalber wurde der Spiegel unmittelbar vor der Justierung noch in siedendem Toluol erhitzt<sup>1)</sup>, um jede zufällige Verunreinigung durch Fett oder passivierende Nickeloxide zu entfernen. Daß die Spiegelfläche völlig rein war, darf wohl aus der guten Übereinstimmung mit den Drudeschen Werten für gelbes Licht geschlossen werden. Der Durchmesser des kreisrunden Spiegels betrug 18 mm. Die direkt gemessene Reihe der Einfallswinkel und die zugehörigen Azimute sind für die fünf wichtigsten Quecksilberlinien in den Tabellen 2—6 niedergelegt. Die Berechnung des Brechungsindex  $\nu$  des Absorptionsindex  $\alpha$ , sowie des Reflexions-

1) A. L. Bernoulli, Münchener Diss. p. 10. 1903.

vermögens aus den direkt gemessenen Größen Haupteinfallswinkel und Hauptazimut geschah nach den folgenden von Drude angegebenen Näherungsformeln, welche für das sichtbare Spektrum und die hier in Betracht kommenden Metalle völlig ausreichen<sup>1)</sup>

$$x = \operatorname{tg} 2\bar{\psi}, \quad \nu = \frac{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Tabelle 2.

Nickel.  $\lambda = 615$ . Hg-Rot.

$2\varphi$	$\psi$
155°00'	33°23'
154 30	33 41
154 00	33 27
153 45	32 53
153 40	32 31
153 35	31 49
153 30	31 53
153 25	32 13
153 15	32 33
153 00	32 37
152 30	33 04
152 00	33 03

$$\varphi_{\text{Rot}} = 76^\circ 48', \quad \bar{\psi} = 31^\circ 49'.$$

Tabelle 4.

Nickel.  $\lambda = 546$ . Hg-Grün.

$2\varphi$	$\psi$
154°00'	31°50'
153 00	32 26
152 30	32 14
152 15	32 15
152 00	31 53
151 55	31 43
151 50	31 28
151 45	31 40
151 40	31 58
151 30	32 07
151 00	32 26
150 30	32 46
150 00	32 28

$$\varphi_{\text{Grün}} = 75^\circ 55', \quad \bar{\psi} = 31^\circ 28'.$$

Tabelle 3.

Nickel.  $\lambda = 578$ . Hg-Gelb.

$2\varphi$	$\psi$
154°00'	32°26'
153 00	32 28
152 30	32 30
152 15	32 17
152 10	31 46
152 00	31 40
151 55	31 52
151 50	31 59
151 45	32 64
151 30	32 23
151 00	32 47
150 00	32 19

$$\varphi_{\text{Gelb}} = 76^\circ 00', \quad \bar{\psi} = 31^\circ 40'.$$

Tabelle 5.

Nickel.  $\lambda = 492$ . Hg-Blaugrün.

$2\varphi$	$\psi$
153°00'	32°58'
152 00	32 49
151 45	32 04
151 30	31 38
151 25	31 32
151 20	31 20
151 15	31 39
151 00	32 11
150 30	33 09
150 00	31 51
149 00	31 51

$$\varphi_{\text{Blaugrün}} = 75^\circ 40', \quad \bar{\psi} = 31^\circ 20'.$$

1) P. Drude, Lehrbuch der Optik p. 335.

Tabelle 6.  
Nickel.  $\lambda = 436$ . Hg-Violett:

$2\varphi$	$\psi$
153° 00'	31° 44'
152 00	32 12
151 30	32 01
151 15	31 35
151 00	31 18
150 50	31 12
150 45	31 03
150 38	31 12
150 30	32 22
150 15	32 12
150 00	31 56
149 00	31 40

$$\bar{\varphi}_{\text{Violett}} = 75^{\circ}23', \quad \bar{\psi} = 31^{\circ}03'.$$

Tabelle 7.

Die optischen Konstanten des Nickels für 5 Quecksilberlinien.

Wellenlänge	$\bar{\varphi}$	$\bar{\psi}$	$\nu$	$x$	$J$
615 Rot	76° 48'	31° 49'	1,846	2,014	66,3
578 Gelb	76 00	31 40	1,747	1,991	64,4
546 Grün	75 55	31 28	1,759	1,957	63,9
492 Blaugrün	75 40	31 20	1,741	1,935	63,1
436 Violett	75 23	31 03	1,736	1,889	61,9

Tabelle 8.

Stahl.  $\lambda = 615$ . Hg Rot.

$2\varphi$	$\psi$
152° 57'	28° 28'
153 27	28 36
153 57	28 03
154 27	27 50
154 42	28 09
154 57	28 03
155 04	27 51
155 12	27 09
155 20	27 14
155 27	27 20
155 57	27 46
156 27	27 41

$$\bar{\varphi}_{\text{Rot}} = 77^{\circ}36', \quad \bar{\psi} = 27^{\circ}09'.$$

Tabelle 9.

Stahl.  $\lambda = 578$ . Hg-Gelb.

$2\varphi$	$\psi$
151° 57'	28° 01'
152 57	27 46
153 27	27 56
153 42	27 58
153 50	27 50
153 57	27 46
154 05	27 38
154 12	27 33
154 21	27 39
154 27	27 49
154 42	27 40

$$\bar{\varphi}_{\text{Gelb}} = 77^{\circ}06', \quad \bar{\psi} = 27^{\circ}33'.$$

Tabelle 10.

Stahl.  $\lambda = 546$ . Hg-Grün.

$2\varphi$	$\psi$
149° 27'	29° 03'
150 27	29 23
150 57	29 11
151 42	28 30
151 50	28 26
151 54	27 46
151 57	27 58
152 01	28 19
152 04	28 42
152 12	29 03
152 27	29 17
152 57	29 25
153 27	29 06

$$\bar{\varphi} = 75^\circ 57', \quad \bar{\psi} = 27^\circ 46'.$$

Tabelle 11.

Stahl.  $\lambda = 492$ . Hg-Blaugrün.

$2\bar{\varphi}$	$\bar{\psi}$
147° 31'	31° 04'
148 31	30 58
149 31	30 58
149 46	31 08
150 01	30 47
150 04	30 17
150 16	30 39
150 24	30 46
150 31	31 09
150 46	31 16
151 01	31 26
151 16	31 17
151 31	31 01

$$\bar{\varphi}_{\text{Blaugrün}} = 75^\circ 03', \quad \bar{\psi} = 30^\circ 17'.$$

Tabelle 12.

Stahl.  $\lambda = 436$ . Hg-Violett.

$2\varphi$	$\psi$
147° 27'	30° 16'
148 27	30 20
148 57	30 49
148 12	30 34
149 19	30 27
149 24	30 09
149 27	30 03
149 31	30 16
149 35	30 47
149 42	31 01
149 57	31 33
150 27	31 03
151 27	30 59

$$\bar{\varphi}_{\text{Violett}} = 74^\circ 44', \quad \bar{\psi} = 74^\circ 44'.$$

Tabelle 13.

Die optischen Konstanten des Stahls für 5 Emissionslinien des Quecksilbers.

Wellenlänge	$\bar{\varphi}$	$\bar{\psi}$	$v$	$x$	$J$
615 Rot	77° 36'	27° 09'	2,592	1,392	60,0
578 Gelb	77 06	27 33	2,435	1,434	59,4
546 Grün	75 57	27 46	2,190	1,457	58,6
592 Blaugrün	75 08	30 17	1,778	1,772	59,6
436 Violett	74 44	30 03	1,762	1,739	58,6

Minor<sup>1)</sup> gibt an, daß, wenn man bei der Berechnung ganze Minuten noch mitführt, die Größen  $\nu$  und  $\alpha$  bis auf drei Dezimalstellen genau werden. Das Reflexionsvermögen bei senkrechter Inzidenz  $J$  ergibt sich aus den Größen  $\nu$  und  $\alpha$  nach der Gleichung

$$J = \frac{\nu^3(1 + \alpha^2) + 1 - 2\nu}{\nu^3(1 + \alpha^2) + 1 + 2\nu}.$$

Die nach diesen Formeln berechneten Konstanten finden sich in Tab. 7 zusammengestellt.

Ferner habe ich die Konstanten eines gehärteten Stahls im sichtbaren Gebiet bestimmt. Ich wählte als Material einen vorzüglichen stählernen Galvanometerspiegel. Derselbe war von der Firma Hartmann & Braun bezogen. Der Spiegel war kreisrund und hatte einen Durchmesser von 16 mm. Auch dieser Spiegel wurde durch Kochen in Toluol „aktiviert“ und von Fett gereinigt. Die Resultate der Messung finden sich in den Tabb. 8—13. Die Größen  $\nu$  und  $\alpha$  werden nach denselben Formeln berechnet, wie für Nickel.

##### 5. Vergleich der Resultate mit denjenigen anderer Beobachter.

Die Tabb. 14 und 15 ermöglichen den Vergleich meiner Messungen der beiden Hauptwinkel für Nickel. Die Übereinstimmung für rot und gelb mit den Drudeschen Werten ist eine so gute, daß auch für die erstmals gemessenen Werte bei kürzeren Wellenlängen eine ähnlich hohe Genauigkeit, wie sie Drude erreicht hat, wahrscheinlich wird.

Tab. 16 gibt eine Zusammenstellung der Brechungsindizes für Nickel. Die Übereinstimmung der aus den Hauptwinkeln berechneten Werte für  $\nu$  mit Prismenbeobachtungen ist nicht besser als bei Benutzung der Drudeschen Werte. Jedenfalls ergibt sich die Dispersion des Nickels im sichtbaren Gebiet nach meinen Messungen und in Übereinstimmung mit den Prismenbeobachtungen von Kundt als sehr viel geringer, als man nach den Messungen von Pflüger und von Dubois und Rubens erwarten konnte.

Eine weitere Bestätigung finden die neuen Werte durch den Vergleich der aus den Hauptwinkeln berechneten Reflexionsvermögen bei senkrechter Inzidenz.

---

1) R. S. Minor, l. c. p. 596.

In Tab. 17 sind die  $J$ -Werte von Drude und von mir mit dem direkt gemessenen Reflexionsvermögen nach Hagen und Rubens zusammengestellt. Die neuen Werte liegen den direkt gemessenen wesentlich näher als diejenigen von Drude.

Die Tab. 18—20 ermöglichen den Vergleich der für gehärteten Stahl gemessenen Werte der Hauptwinkel und der Brechungsindizes mit früheren Beobachtungen. Hier möchte ich namentlich auf die vorzügliche Übereinstimmung der Haupteinfallswinkel bei den drei letzten Beobachtern für rot und gelb hinweisen.

Die Tab. 21 endlich veranschaulicht die Dispersion des Reflexionsvermögens in Prozenten der auffallenden Strahlung bei Reflexion vertikal zum Spiegel. Dabei sind die Werte Drude, Minor und dem Verfasser aus  $\bar{\varphi}$  und  $\bar{\psi}$  berechnet. Die Werte von Hagen und Rubens<sup>1)</sup> sind direkt photometrisch beobachtet.

Bei Minor, Hagen und Rubens und ebenso bei meinen Messungen ergibt sich ein auffallendes Maximum in der Gegend von und ebenso übereinstimmt ein starkes Anwachsen der Werte in Rot. Ein Minimum liegt im Blaugrün und es fallen nach Violett hin die Werte ab. Diese letztere Abnahme erstreckt sich nach den Beobachtungen von Minor und von Hagen und Rubens<sup>2)</sup> auch noch weit ins ultraviolette Gebiet hinein. Die numerische Übereinstimmung der korrespondierenden Werte für  $J$  bei Minor und Hagen und Rubens ist dagegen weniger gut und man wäre leicht geneigt, der unzureichenden Theorie die Schuld zu geben. Um so wertvoller scheint mir die exakte Bestätigung der Theorie der Metallreflexion an einem *Metall* und zwar für relativ kurze Wellenlängen, wie sie sich aus der Koinzidenz der neuen aus  $\bar{\varphi}$  und  $\bar{\psi}$  berechneten Werte für  $J$  mit denjenigen von Hagen und Rubens ergibt. Ähnlich gute Koinzidenzen des direkt gemessenen und des indirekt bestimmten Reflexionsvermögens haben sich meines Wissens bis jetzt an einem Metall noch nicht ergeben. Die Messungen von Walter<sup>3)</sup>

1) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 1. p. 352. 1900.

2) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 8. p. 1. 1902.

3) B. Walter, Wied. Ann. 56. p. 424. 1895.

Tabelle 14.  
Werte der Haupteinfallswinkel  $\varphi$  für Nickel.

Wellenlänge	Quincke	Drude	Bernoulli
Rot, $\lambda = 615$	—	76° 48'	76° 48'
D-Linie, $\lambda = 578$	76° 07'	76 01	76 00
$\lambda = 546$	—	—	75 55
$\lambda = 492$	—	—	75 40
$\lambda = 436$	—	—	75 23

Tabelle 15.  
Werte des Hauptazimuts  $\psi$  für Nickel.

Wellenlänge	Quincke	Drude	Bernoulli
Rot, $\lambda = 615$	—	31° 48'	31° 49'
D-Linie, $\lambda = 578$	32° 09'	31 41	31 40
$\lambda = 546$	—	—	31 28
$\lambda = 492$	—	—	31 20
$\lambda = 436$	—	—	31 03

Tabelle 16.  
Dispersion des Brechungsexponenten des Nickels.  
(P) = Prismenbeobachtung.

Wellenlänge	Quincke	Dubois-Rubens	Pflüger	Kundt	Drude	Bernoulli
670 Li	—	2,04	—	—	—	—
656	1,8	1,98	2,24 (P)	2,19 (P)	—	—
615 Hg	—	—	—	—	1,89	1,846
D-Linie bzw. Hg-Gelb	—	1,84	1,87 (P)	2,01 (P)	1,79	1,747
Tl bzw. Hg-Grün	1,6	1,71	—	—	—	1,759
486 bzw. 492	—	—	1,67 (P)	—	—	1,741
431 bzw. 436	1,45	1,54	—	1,85 (P)	—	1,736

Tabelle 17.  
Dispersion des Reflexionsvermögen  $J$  des Nickels.

Wellenlänge	Hagen u. Rubens	Drude	Bernoulli
$\lambda = 650$ bzw. 615	66,0	63,7	66,3
$\lambda = 600$ bzw. 578	64,9	62,0	64,4
$\lambda = 550$ bzw. 546	62,6	—	63,9
$\lambda = 500$ bzw. 492	60,8	—	63,1
$\lambda = 450$ bzw. 436	58,5	—	61,9

Tabelle 18.  
Haupteinfallswinkel  $\varphi$  des Stahles.

Wellenlänge	Jamin	Quincke	Drude	Minor	Bernoulli
Rot, Li, bzw. Hg-Rot	77° 04'	—	77° 27'	77° 38'	77° 36'
D-Linie, bzw. Hg-Gelb	76 40	75° 28'	77 03	77 09	77 06
E-Linie, $\lambda = 550$ bzw. Hg-Grün	75 47	—	—	76 35	75 57
F, $\lambda = 500$ bzw. Hg-Blaugrün	75 08	—	—	75 47	75 03
H, $\lambda = 450$ bzw. Hg-Violett	74 32	—	—	74 48	74 44

Tabelle 19.  
Werte des Hauptazimuts  $\psi$  für Stahl.

Wellenlänge	Jamin	Quincke	Drude	Minor	Bernoulli
Rot, Li bzw. Hg-Rot	16° 29'	—	27° 12'	27° 14'	27° 09'
D-Linie bzw. Hg-Gelb	16 48	28° 16'	27 49	27 45	27 33
E, $\lambda = 550$ bzw. Hg-Grün	17 30	—	—	28 18	27 46
F, $\lambda = 500$ bzw. Hg-Blaugrün	18 29	—	—	29 02	30 17
H, $\lambda = 450$ bzw. Hg-Violett	20 07	—	—	29 36	30 03

Tabelle 20.  
Dispersion der Brechungsindizes des Stahles.

Wellenlänge	Jamin	Drude	Minor	Bernoulli
Rot $\lambda = 600$ , Li, Hg-Rot	2,37	2,62	2,71 (Li) 2,65 (Rot)	2,592
D-Linie, Hg-Gelb	2,26	2,41	2,49	2,435
E, 500, Hg-Grün	2,06	—	—	2,190
F, 550, Hg-Blaugrün	1,68	—	2,03	1,778
G, 450, Hg-Violett	—	—	1,80	1,762

Tabelle 21.  
Dispersion des Reflexionsvermögens  $J$  für Stahl.

Wellenlänge	Drude	Minor	Hagen u. Rubens (Gehärt. Stahl)	Bernoulli (Gehärt. Stahl)
Rot, 600, Hg-Rot	58,5	58,6	60,0	60,0
D-Linie, Hg-Gelb	58,5	—	—	59,4
E, 550, Hg-Grün	—	57,7	59,4	58,6
F, 500, Hg-Blaugrün	—	56,9	59,6	59,6
G, 450, Hg-Violett	—	55,4	58,6	58,6

und von Pflüger<sup>1)</sup> an Spiegeln aus Fuchsin boten bis dahin wohl die einzige völlig exakte Bestätigung der Theorie.

Besonders hervorheben möchte ich noch, daß sich die Messungen von allen drei Beobachtern auf gehärteten Stahl beziehen. Weicher Stahl zeigt nach Hagen und Rubens einen ganz verschiedenen Gang des Reflexionsvermögens.<sup>2)</sup>

Die nach meiner Methode gewonnenen Resultate zeigen jedenfalls, daß es nach der beschriebenen Methode möglich ist, mit Hilfe der allereinfachsten experimentellen Hilfsmitteln Präzisionsmessungen der optischen Konstanten metallisch reflektierender Medien durchzuführen. Aus Uviolglas ließe sich wohl ein Fresnelsches Parallelepiped herstellen, welches für eine der längeren ultravioletten Emissionslinien des Quecksilberlichtbogens richtig wäre. In Verbindung mit einem Soretschen Fluoreszenzokular würde dieses Parallelepiped es ermöglichen, die optischen Konstanten der Metalle bis weit ins ultraviolette Gebiet hinein ohne Zuhilfenahme der Photographie mit annähernd derselben Genauigkeit zu bestimmen, wie im sichtbaren Teil des Spektrums. Mit Hilfe eines geeigneten Bolometers ließen sich wohl auch Messungen im ultravioletten Gebiet ausführen.

Heute, wo die junge Wissenschaft der Metallographie mit Vorliebe optische Methoden benutzt, gewinnt die vorliegende Methode auch für den Techniker Interesse. Sie bietet ihm zum erstenmal Gelegenheit die optischen Konstanten der Metalle und deren Abhängigkeit vom Gefüge mit einfachen handlichen Apparaten zu messen.

Die Versuche sollen noch auf andere Metalle ausgedehnt werden. Wenn es mir gelungen ist, zu zeigen, daß Präzisionsmessungen der optischen Konstanten der Metalle sich mit den beschriebenen einfachen Hilfsmitteln durchführen lassen und zwar in allen Teilen des sichtbaren Spektrums, so halte ich den Zweck meiner Arbeit für erreicht.

1) A. Pflüger, Wied. Ann. 57. p. 394. 1896 und P. Drude, Winkelmanns Handbuch der Physik. II. Aufl. 6. p. 1316.

2) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 1. p. 366. 1900.

8. Über die  
*Dispersion des Lichtes in gasförmigen  
 Kohlenwasserstoffen;*  
*von Stanislaw Loria.*

(Auszug aus dem „Bulletin de l'academie des sciences des Cracovie“, Dezember 1908, p. 1059—1067; Februar 1909, p. 195—207.)

Einleitung.

In Anbetracht des Umstandes, daß die moderne Theorie der Dispersion gasförmiger Isolatoren geeignet erscheint, zu sehr wichtigen Folgerungen in bezug auf das heutzutage noch dunkle Problem der Valenz zu führen<sup>1)</sup>, eröffnet sich der physikalischen Experimentalforschung die Aufgabe, eine exakte Revision des bestehenden Beobachtungsmaterials durchzuführen und es womöglich zu ergänzen.

Einen Beitrag zu diesem umfangreichen, und wohl der Mitwirkung mehrerer Forscher bedürfenden, Unternehmen zu liefern, war die Aufgabe der Untersuchungen, über die ich hier kurz mitteilen möchte.

Um den theoretischen Gesichtspunkt zu fixieren, von dem aus die Resultate der Untersuchungen erörtert werden sollen, sei hier auf die von Natanson<sup>2)</sup> abgeleiteten Beziehungen hingewiesen.

Bezeichnet man mit  $n_1$  und  $n_2$  die Brechungsexponenten eines Gases für die Wellen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , so folgt aus der bekannten Lorenz-Lorentzschen Dispersionsgleichung, daß unter der Voraussetzung einer einzigen Gattung der Dispersionslektronen die Größe

$$(1) \quad D = \frac{3(n_2 - n_1)\lambda_1^2\lambda_2^2}{2(n_1 - 1)(n_2 - 1)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}$$

im ganzen betrachteten Spektralbeirke (mindestens wenn dieser

1) Vgl. P. Drude, Ann. d. Phys. 14. p. 677 ff. 1904; J. J. Thomson, Corpuscular Theory of matter London 1907; W. Natanson, On the Electromagnetic Theory of Dispersion and Extinction. Bull de l'Acad. des Sciences de Cracovie April 1907.

2) W. Natanson, l. c. p. 332.

weit von Absorptionsstreifen liegt) eine Konstante von der Größenordnung  $10^{-7} \text{ cm}^2$  sein soll.

Andererseits gilt für das Modell einer Substanz, die nur eine einzige Gattung beweglicher Elektronen besitzt, die Beziehung

$$(2) \quad a \Delta = \frac{3 \pi c^2}{\frac{e}{m} e M}$$

= einer universellen Konstante, wobei  $a$  die Anzahl der „Dispersionselektronen“ pro Molekül,  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum,  $M$  die Anzahl der Moleküle pro Volumeneinheit bezeichnet.

Sind wir imstande, für eine Reihe von Gasen die Existenz einer konstanten  $\Delta$  nachzuweisen, so legt uns die Gleichung (2) die Beziehung zwischen den „Dispersionselektronen“ und der Valenz nahe. Die genannte Frage läßt sich heutzutage nicht anders als nur mittels mehr oder weniger gewagter Hypothesen überhaupt angreifen. Mit allem Vorbehalt, als eine Art Arbeitshypothese nahm Natanson<sup>1)</sup> dem Beispiel von Drude<sup>2)</sup> folgend an

$$a = v = \text{Summe der Valenzen},$$

und berechnete die Größe  $v \Delta$  für eine lange Reihe von Gasen, deren Dispersion mit genügender Genauigkeit bekannt ist. Das Resultat dieser Rechnung<sup>3)</sup> war insofern auffallend, daß sich für  $v \Delta$  wirklich nahezu konstante Werte ergaben, die um den Mittelwert

$$16,3$$

herum schwankten, während gerade die Zuverlässigkeit dieser Fälle, welche sich der „ $v \Delta$ -Regel“ nicht fügten, wegen der zwischen einzelnen Beobachtern bestehenden Widersprüche (Stickstoff) einerseits und der Schwierigkeit der Darstellung reiner Substanzen (Stickoxyde) andererseits vermindert erschien.

Unter solchen Umständen war es sehr wünschenswert, das Verhalten gasförmiger Kohlenwasserstoffe: des *Methans* ( $\text{CH}_4$ ), *Acetylen* ( $\text{C}_2\text{H}_2$ ), *Äthylen* ( $\text{C}_2\text{H}_4$ ) und *Äthans* ( $\text{C}_2\text{H}_6$ )

1) W. Natanson, l. c. p. 331—332, 342—344; insbesondere p. 347 bis 348 u. 351.

2) P. Drude, l. c.

3) l. c. p. 347—351.

kennen zu lernen. Ihre Dispersion ist noch nicht gemessen worden. Es liegen nur Beobachtungen von Dulong<sup>1)</sup> und Mascart<sup>2)</sup> vor, die jedoch auch nicht die Dispersion, sondern nur zwei Brechungsexponenten, nämlich für Na-Licht und weißes Licht bestimmt haben. Dulong fand für weißes Licht

$$\begin{aligned} \text{für Methan} & . . . n_{0,760} = 1,000448 \\ \text{„ Äthylen} & . . . n_{0,760} = 1,000678 \end{aligned}$$

Mascart fand für Na-Licht

$$\begin{aligned} \text{für Methan} & . . . n_{0,760} = 1,000444 \\ \text{„ Acetylen} & . . . n_{0,760} = 1,000610 \\ \text{„ Äthylen} & . . . n_{0,760} = 1,000723 \end{aligned}$$

Bezüglich der Angaben Mascarts muß jedoch hinzugefügt werden, daß sie eigentlich nur die *Refraktion* der genannten Gase, bezogen auf Luft, betreffen. Dabei fehlt aber jede nähere Auskunft über die tatsächlichen Versuchsbedingungen. Von der Temperatur wird gesagt „une température voisine de 12 degrés“; der Druck wird nicht angegeben.

J. W. Brühl<sup>3)</sup> hat zwar die Mascartschen Werte auf 0° 760 mm Hg reduziert. Da jedoch die von ihm benutzte Reduktionsformel wegen der unzureichenden Angaben Mascarts wohl als unsicher bezeichnet werden muß, so sind auch die oben angeführten Werte bloß als annäherungsweise richtige zu betrachten. Dagegen fehlen für Äthan auch diese dürftigen Angaben und es scheint überhaupt nicht untersucht gewesen zu sein.

### I. Die Dispersion des Acetylens und Methans.

#### Methode und Versuchsanordnung.

Zur Bestimmung der Dispersion des Acetylens und Methans im sichtbaren Spektrum habe ich folgende auf Fig. 1 dargestellte Versuchsanordnung benutzt.

Das Licht eines Nernstfadens (*N*) wird durch die Linse (*L*<sub>1</sub>) auf den Kollimatorspalt eines festarmigen Monochromators<sup>4)</sup> (*M*)

1) P. L. Dulong, Ann. de Chim. et de Phys. 31. p. 154, 172. 1826.

2) E. Mascart, Compt. rend. 86. p. 321 u. 1182. 1878.

3) J. W. Brühl, Zeitschr. f. phys. Chem. 7. p. 1, 21 u. 24. 1891.

4) F. Löwe, Physik. Zeitschr. 8. p. 837. Nr. 23.

konzentriert, zerlegt und als ein schmales monochromatisches Bündel durch einen symmetrischen zweiten Spalt und die Linse ( $L_2$ ) in ein Michelsonsches Interferometer<sup>1)</sup> geworfen. Das Interferometer, dessen beide Spiegel ( $S_1, S_2$ ) je 60 cm von der halbversilberten schrägen Platte entfernt sind, ist auf „Nullstellung“ gebracht und so justiert, daß im weißen Lichte

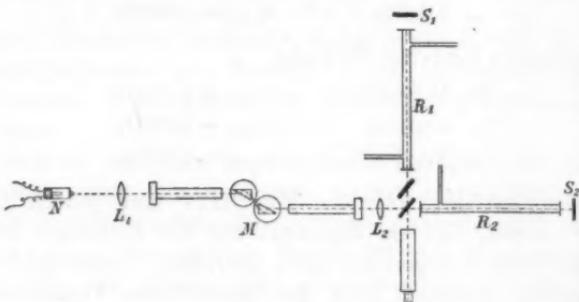


Fig. 1.

bunte vertikale Streifen, „Kurven gleicher Dicke“ im Gesichtsfelde erscheinen. Bei Benutzung einfärbigen Lichtes wird diese Stellung dadurch erkennbar, daß eine Verschiebung des Spektrums vor dem symmetrischen Spalte vom äußersten Rot bis zum äußersten Violett keinerlei Verschiebung der Interferenzstreifen verursacht. In jedem der beiden Arme des Interferometers befindet sich je ein 50,73 cm langes, ca.  $1\frac{1}{3}$  cm weites, mit planparallelen Platten luftdicht verschlossenes und mit der Pumpe verblasenes Rohr ( $R_1, R_2$ ). Beide Rohre können durch Hähne abgeschlossen werden. Eines von ihnen ( $R_1$ ) besitzt eine Zuleitung, die mit einem U-förmigen Manometer und mit zwei durch ein Kapillarrohr getrennten Trockengefäßern versehen ist. Das Manometer besitzt eine Millimeterskala, die in dem benutzten Gebiete mit dem Normalmeter verglichen und bis auf  $\frac{1}{10}$  mm übereinstimmend gefunden wurde. Während des Versuches ist das Rohr  $R_1$ , ebenso wie ein ihm unmittelbar anliegendes Thermometer gut in Watte eingewickelt. In

1) Der Apparat ist nach Angabe des Hrn. Prof. Lummer von der Firma A. Hilger Ltd., London, sehr sorgfältig ausgeführt worden und hat sich als sehr brauchbar erwiesen.

der Zuleitung zur Pumpe befindet sich endlich ein Geißlerrohr, das als Vakuummeter benutzt wird. Die Röhren können bis auf Kathodenstrahlevakuum ausgepumpt werden und halten über 48 Stunden lang dicht. Vor Beginn der Beobachtungen wurde der Monochromator, dessen zwei Prismen auf meßbar drehbaren Tischen stabil befestigt sind, mehrmals sorgfältig geeicht. Indem man nämlich den symmetrischen Spalt durch ein Okular mit Fadenkreuz ersetzte, konnte man den Apparat wie ein gewöhnliches Spektroskop handhaben und bestimmte die Lage von 12 Linien in dem benutzten Spektralbezirke.

Der Gang der Untersuchungen war kurz folgender: Nachdem die beiden Rohre ausgepumpt, mit dem zu untersuchenden Gase durchgespült und wieder ganz ausgepumpt worden waren, suchte man die Nullstellung der Spiegel des Interferometers auf. Dies erreicht man leicht, indem man das Fadenkreuz zwischen die beiden ungefärbten „Streifen gleicher Dicke“ einstellt. Nun wurde die weiße Lichtquelle durch den Monochromator ersetzt und das Rohr  $R_1$  von der Pumpe abgeschlossen. Durch die Drehung der Trommel des Monochromators überzeugte man sich, ob die beiden Spiegel exakt auf Nullstellung gebracht worden sind, um ihre Lage eventuell noch zu korrigieren. Nachdem nun der Manometerstand, die Temperatur des Manometers und die des Rohres beobachtet war, öffnete man die Zuleitung zum Gasbehälter und zählte die durchs Fadenkreuz wandernden Streifen. Durch Vorschalten eines entsprechend engen Kapillarröhrchens läßt sich der Zufluß des Gases so regulieren, daß eine sichere und bequeme Beobachtung des Wanderns ermöglicht wird. Nachdem etwa 130 Streifen das Fadenkreuz passiert hatten (weiter konnte man nicht zählen, weil dann die Streifen schon verwaschen erschienen), wurde die Zuleitung abgeschlossen und die Skala des Manometers und der beiden Thermometer wieder abgelesen.

Durch dieses Verfahren gewann man das nötige Beobachtungsmaterial, um aus der bekannten Beziehung

$$③ \quad n - 1 = \frac{N \lambda}{p t} (1 + \alpha t) \cdot 760,$$

wobei die einzelnen Buchstaben folgende Bedeutung haben:

- $n$  der Brechungsexponent bei  $0^\circ\text{C}$ . 760 mm Hg,
- $\lambda$  die benutzte Wellenlänge,
- $N$  die beobachtete Anzahl der Streifen,
- $p$  der auf  $0^\circ\text{C}$ . reduzierte Unterschied des Manometerstandes,
- $l$  die doppelte Länge des Rohres,
- $\alpha$  der Ausdehnungskoeffizient des Gases (1/273),
- $t$  die (mittlere) Temperatur des Rohres,

den absoluten Wert des Brechungsexponenten für die benutzte Welle  $\lambda$  auszuwerten.

Der zweite Teil des bei der Beobachtung befolgten Verfahrens sollte unmittelbar die Änderung der Anzahl verschiedener Streifen angeben, die durch kontinuierliche Änderung der Wellenlänge verursacht wird. Es wurde daher die Trommel des Monochromators langsam gedreht und, während das Spektrum vor dem symmetrischen Spalte sich von Rot nach Violett hin bewegte, das dadurch hervorgerufene Wandern der Streifen beobachtet. Nachdem ein Streifen das Fadenkreuz passiert hatte, las man die Wellenlänge am Monochromator ab. Bei diesem Teil der Beobachtung hat mir Hr. cand. phil. G. Gruschke in liebenswürdiger Weise geholfen. Durch dieses Verfahren gewann man direkt die Größe  $dN/d\lambda$  und konnte daher aus der Gleichung

$$\frac{dn}{d\lambda} = \text{const.} \left( N + \lambda \frac{dN}{d\lambda} \right)$$

die Brechungsexponenten für einige Stellen des Spektrums berechnen.<sup>1)</sup> Die so ermittelten Werte wurden außerdem durch direkte absolute Bestimmungen kontrolliert.

Was die Genauigkeit der Messungen anbetrifft, so ist der Druck (im Durchschnitt 140 mm) bis auf  $1/10$  mm, die Streifenverschiebung (durchschnittlich 120) bis auf  $1/10$  einer Streifenbreite, die Temperatur auf  $1/10^\circ\text{C}$ . genau abgelesen worden.

Bei der Herstellung und Reinigung der untersuchten Gase wurde ich vom Direktor des hiesigen chemischen Instituts Hrn. Geheimrat Prof. Dr. A. Ladenburg und seinem Assistenten Hrn. Dr. Wladyslaw Sobecki in liebenswürdiger

---

1) Dieselbe Methode haben unlängst, wie ich nachträglich erfahren habe, die Herren C. Cuthbertson u. E. P. Metcalfe (Proc. Roy. Soc. 80. (A) p. 540. 1908) angewendet.

Weise unterstützt, wofür ich an dieser Stelle meinen besten Dank aussprechen möchte.

Das Acetylen wurde aus Calciumcarbid und Wasser hergestellt und durch fraktionierte Destillation in flüssiger Luft gereinigt. Das Methan erhielt man auf dem Wege der bekannten Grignard'schen Reaktion durch Zersetzung des Magnesium-jod-methyls mit Wasser. Das sich dabei entwickelnde Gas wurde durch rauchende Schwefelsäure und Kalilauge geleitet. Die so dargestellten Gase fing man in Glasgasometer auf und schritt rasch zu ihrer Untersuchung.

Die Resultate der nach dem oben beschriebenen Verfahren ausgeführten Messungen sind z. B. im nachstehenden Protokoll zusammengestellt.

Absolute Bestimmung des Brechungsexponenten des Methans  
für  $\lambda = 6,585 \cdot 10^{-5}$  cm. 29. Oktober 1908.

Manometerstand		
am Anfang	am Ende	Differenz
799,9	727,2	755,3
44,6	117,5	609,7
755,3	609,7	145,6

Temperatur des Manometers . . . . .  $18,1^\circ$  C.  
Temperatur des Rohres (Mittel) . . . . .  $18,25^\circ$  C.  
Anzahl der Streifen . . . . . 121,4 nach rechts.

Es ergibt sich für  $n_{0,760}$  der Wert  
1,0004404.

Das Resultat sechs solcher unabhängiger Bestimmungen sei beispielsweise in Tab. I zusammengestellt.

Tabelle I.  
 $\lambda = 6,585 \cdot 10^{-5}$  cm. Methan.  $l = 101,46$  cm.

Nr.	Druckänderung in mm Hg $0^\circ$ C.	Anzahl der Streifen	Temperatur des Rohres	$n_{0,760}$
1.	143,5	120,3	17,7	1,0004402
2.	132,62	110,6	19,45	1,0004406
3.	133,84	111,9	18,6	1,0004404
4.	144,5	121,1	17,95	1,0004404
5.	145,01	121,4	18,25	1,0004404
6.	143,32	119,9	18,6	1,0004403
			Mittel	1,0004404

Die Werte für andere  $\lambda$  ermittelte man in der oben geschilderten Weise aus den gleichzeitig aufgenommenen Kurven  $dN/d\lambda$ . Außerdem wurden die absoluten Bestimmungen für fünf Stellen im Spektrum wiederholt und auf diese Weise die relative Bestimmung kontrolliert.

#### Resultate.

Aus 38 best übereinstimmenden absoluten und relativen Bestimmungen ergibt sich für *Methan* folgende Tabelle der Brechungsexponenten im sichtbaren Spektrum.

Tabelle II.  
Dispersion des Methans.

	$\lambda$ in $10^{-5}$ cm	$n_{0,780}$
a)	6,585	1,0004404
b)	6,375	1,0004411
c)	5,935	1,0004435
d)	5,718	1,0004454
e)	5,290	1,0004478

Setzt man obige Werte in die Cauchysche Dispersionssformel

$$n - 1 = a \left( 1 + \frac{b}{\lambda^2} \right),$$

so ergibt sich

$$a = 0,00042607,$$

$$b = 1,441 \cdot 10^{-10}.$$

Die ganz identisch verlaufende Messung der Dispersion des *Acetylens* ergab folgende aus 42 gut übereinstimmenden absoluten und relativen Bestimmungen zusammengestellte Tabelle der Brechungsexponenten.

Tabelle III.  
Dispersion des Acetylens.

	$\lambda$ in $10^{-5}$ cm	$n_{0,780}$
a)	6,708	1,0005604
b)	6,375	1,0005627
c)	5,896	1,0005651
d)	5,769	1,0005663
e)	5,461	1,0005698

Für die Konstanten der Cauchyschen Formel bekommt man

$$a = 0,00054242,$$

$$b = 1,453 \cdot 10^{-10}.$$

Berechnet man nach Natanson die Werte:

$$\Delta = \frac{3(n_2 - n_1) \lambda_1^2 \lambda_2^2}{2(n_1 - 1)(n_2 - 1)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)},$$

so erhält man:

Für Methan:

aus a) und c)	...	$\Delta = 4,47$
" c)	" e)	$\Delta = 4,42$
" b)	" e)	$\Delta = 4,57$
" a)	" e)	$\Delta = 4,44$
	Mittel	$\Delta = 4,48$

Für Acetylen:

aus a) und e)	...	$\Delta = 3,91$
" b)	" d)	$\Delta = 4,07$
" c)	" e)	$\Delta = 4,59$
" a)	" d)	$\Delta = 3,62$
	Mittel	$\Delta = 4,05$

Das Produkt  $v\Delta$ , wo  $v$  die Summe der Valenzen bedeutet, wäre daher:

$$\text{Für Methan } (v = 8) \dots \dots \quad v\Delta = 35,84$$

$$\text{" Acetylen } (v = 10) \dots \dots \quad v\Delta = 40,50$$

## II. Die Dispersion des Äthylens und Äthans.

### Methode und Versuchsanordnung.

Zur Bestimmung der Dispersion des Äthylens und Äthans wurde eine, der oben beschriebenen ganz ähnliche Methode angewandt. Die von der früheren etwas abweichende Versuchsanordnung ist in Fig. 2 dargestellt. Das durch die Blende ( $B_1$ ) durchgehende Licht eines Nernstfadens ( $N$ ) wird von der Linse ( $L_1$ ) nahezu parallel gemacht, in das oben beschriebene Michelsonsche Interferometer geworfen, durch die Linse ( $L_2$ ) wieder gesammelt, um nach dem Durchgang durch die Blende ( $B_2$ ) auf den Spalt eines Spektralapparates konzentriert zu werden. Ist das Interferometer in „Nullstellung“, so erscheint im Okular ein reines kontinuierliches Spektrum.

Entfernt man etwa den Spiegel ( $S_1$ ) von der „Nullstellung“, so bilden sich im Spektrum Interferenzstreifen, die anfangs

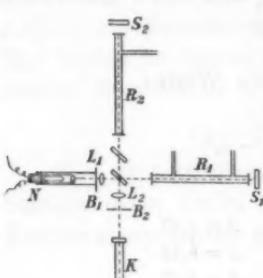


Fig. 2.

breit und verwaschen, später immer enger und schärfer werden. Durch entsprechende Justierung der Spiegel ( $S_1$ ) und ( $S_2$ ) erreicht man leicht die für die Beobachtung günstigste Schärfe und Entfernung einzelner Minima. Unter entsprechend gut gewählten Bedingungen kann man dann bequem etwa 130 Streifen zählen und  $\frac{1}{10}$  einer Streifenbreite schätzen.

Im übrigen blieb die früher benutzte Anordnung unverändert. Die

absolute Bestimmung einzelner Brechungsexponenten geschah in derselben Weise, wie sie im ersten Teile beschrieben wurde.

Bei der Bestimmung der Dispersion muß in Betracht gezogen werden, daß der Spiegel ( $S_1$ ) von der „Nullstellung“ entfernt worden ist, d. h. daß in den Weg eines von den Strahlen eine Luftplatte eingeschoben wurde, deren Dispersion eliminiert werden muß. Es geschieht dies leicht auf Grund folgender Überlegung. Beim Anfangszustand (Druck  $p_1$  mm) sei  $\delta_1$  die Anzahl der Streifen, die im Spektrum zwischen den Wellen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  liegen. Den Endzustand (Druck  $p_2$  mm) erreicht man, indem man  $N$  Streifen durch das Fadenkreuz an der Stelle  $\lambda_1$  ziehen läßt. Der Brechungsexponent für  $\lambda_1$  ist daher

$$(4) \quad n_1 - 1 = K \cdot N \cdot \lambda_1 ,$$

wo  $K$  eine konstante Größe darstellt. Die Anzahl der jetzt beim Endzustand zwischen den Wellen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  liegenden Streifen sei  $\delta_2 > \delta_1$ . Die Differenz

$$\delta_2 - \delta_1 = \delta$$

besagt, daß, wenn die absolute Bestimmung für die Welle  $\lambda_2$  vorgenommen worden wäre,  $(N + \delta)$  Streifen bei derselben Druckänderung ( $p_2 - p_1 = p$ ) durchs Fadenkreuz hätte wandern müssen.

Es ist also:

$$(5) \quad n_2 - 1 = K(N + \delta)\lambda_2 .$$

Aus (4) und (5) folgt:

$$(6) \quad n_2 - 1 = \left(1 + \frac{\delta}{N}\right) \frac{\lambda_2}{\lambda_1} (n_1 - 1).$$

Demzufolge wurde die Größe  $\delta$  für folgende Wellenlängenintervalle ermittelt:

$6,677 \cdot 10^{-5}$ cm	und	$6,185 \cdot 10^{-5}$ cm
"		$5,896 \cdot 10^{-5}$ "
"		$5,790 \cdot 10^{-5}$ "
"		$5,461 \cdot 10^{-5}$ "
"		$5,230 \cdot 10^{-5}$ "

Außer der absoluten Bestimmung für  $\lambda = 6,677 \cdot 10^{-5}$  cm wurde zur Kontrolle auch die Bestimmung für  $\lambda = 5,896 \cdot 10^{-5}$  cm vorgenommen.

Das Äthylen wurde aus Alkohol und konzentrierter Schwefelsäure hergestellt. Das sich beim Erhitzen dieser Mischung bildende Gas wurde durch Waschflaschen mit konzentrierter Schwefelsäure und konzentrierter Natronlauge geleitet und in einem Glasgasometer aufgefangen. Da dieses Produkt jedoch nicht rein genug ist, um zur Bestimmung physikalischer Konstanten dienen zu können, wurde es mittels fraktionierter Destillation bei der Temperatur der flüssigen Luft gereinigt.

Das Äthan erhielt man auf dem Wege der Grignardschen Reaktion durch Zersetzung des Magnesium-Brom-Äthyls mit Wasser. Das dabei entwickelte Gas wurde durch Waschflaschen mit rauchender Schwefelsäure geleitet und in einem mit Kalilaugelösung gefüllten Gasometer gesammelt. Um sich zu vergewissern, daß keine beachtenswerten Mengen von Äthylen als Nebenprodukt mitgenommen wurden, habe ich den Assistenten des hiesigen chemischen Instituts, Hrn. W. Sobecki gebeten, eine Prüfung desselben auf Äthylen vorzunehmen. Es konnten jedoch keine merklichen Mengen von Äthylen nachgewiesen werden, was auch von vornherein wahrscheinlich war.

#### Resultate.

Die Resultate der Messungen sind in nachstehenden Tabellen zusammengestellt.

Tabelle IV.

 $\lambda = 6,677 \cdot 10^{-5}$  cm. Äthylen.  $l = 105,20$  cm.

Nr.	Druckänderung in mm Hg $0^{\circ}\text{C}.$	Anzahl der Streifen	Mittlere Temperatur des Rohres	$n_{0,780}$
1.	103,44	121	18,4	1,0006519
2.	101,85	128,9	18,4	1,0006515
3.	102,25	129,5	18,37	1,0006520
4.	102,84	130,2	18,3	1,0006515
5.	102,25	129,7	18,27	1,0006524
6.	102,26	129,6	18,0	1,0006516
7.	101,86	129,1	17,9	1,0006514
8.	102,65	130,1	17,9	1,0006514
9.	101,86	129,1	18,0	1,0006516
10.	103,17	130,8	17,7	1,0006512
11.	102,65	130	18,2	1,0006516
12.	103,05	130,6	18,1	1,0006519

Mittel 1,0006516

Aus fünf voneinander unabhängigen, gut übereinstimmenden Messungen der Dispersion folgen für  $\left(1 + \frac{\delta}{N}\right)$  die Werte:

Tabelle V.

$$\text{Äthylen } \left(1 + \frac{\delta}{N}\right).$$

$\lambda$ in $10^{-5}$ cm	6,677 bis 6,185	bis 5,896	bis 5,790	bis 5,461	bis 5,230
$1 + \frac{\delta}{N}$	1,082	1,142	1,166	1,241	1,297

woraus sich nachstehende Brechungsexponenten für die betreffenden Wellen ergeben:

Tabelle VI.  
Dispersion des Äthylens.

	$\lambda$ in $10^{-5}$ cm	$n_{0,760}$
a)	6,677	1,0006516
b)	6,185	1,0006531
c)	5,896	1,0006571
d)	5,790	1,0006588
e)	5,461	1,0006614
f)	5,230	1,0006620

Aus obigen Werten berechnete Konstanten der Cauchy-schen Interpolationsformel

$$n - 1 = a \left( 1 + \frac{b}{\lambda^2} \right)$$

sind:

$$a = 0,0006303,$$

$$b = 1,477 \cdot 10^{-10}.$$

Tabelle VII.

$\lambda = 6,677 \cdot 10^{-5}$  cm. Äthan.  $l = 105,20$  cm

Nr.	Druckänderung in mm Hg $0^\circ C.$	Anzahl der Streifen	Temperatur des Rohres	$n_{0,760}$
1.	90,49	131,4	18,45	1,0007477
2.	105,65	153,5	18,2	1,0007475
3.	113,42	165	17,97	1,0007477
4.	103,06	149,9	17,77	1,0007472
5.	88,29	128,2	18,65	1,0007479
6.	89,49	129,9	18,82	1,0007483
7.	89,80	130,6	18,47	1,0007481
8.	89,70	130,5	17,9	1,0007477
9.	89,73	130,8	17,4	1,0007479
10.	89,29	129,7	18,5	1,0007481
Mittel				1,0007478

Absolute Bestimmung für  $\lambda = 5,896 \cdot 10^{-5}$  cm gibt

$$n_{D_1} = 1,0007524.$$

Tabelle VIII.

$$\text{Äthan } \left(1 + \frac{\delta}{N}\right).$$

$\lambda$ in $10^{-5}$ cm	6,677 bis 6,185	bis 5,896	bis 5,790	bis 5,461	bis 5,290
$1 + \frac{\delta}{N}$	1,084	1,140	1,163	1,237	1,292

Daraus folgen die Brechungsexponenten:

Tabelle IX.  
Dispersion des Äthans.

	$\lambda$ in $10^{-5}$ cm	$n_{0,780}$
a)	6,677	1,0007478
b)	6,185	1,0007509
c)	5,896	1,0007528
d)	5,790	1,0007542
e)	5,461	1,0007566
f)	5,290	1,0007568

Die Cauchyschen Konstanten lauten:

$$a = 0,0007365,$$

$$b = 9,308 \cdot 10^{-11}.$$

Um die Exaktheit des befolgten Verfahrens zu prüfen, habe ich die bekannte Dispersion der Luft neu bestimmt.<sup>1)</sup> Die Resultate sind in folgenden Tabellen zusammengestellt.

Tabelle X.  
 $\lambda = 6,677 \cdot 10^{-5}$  cm. Luft.  $l = 105,20$  cm.

Nr.	Druckänderung in mm Hg $0^\circ\text{C}$ .	Anzahl der Streifen	Temperatur des Rohres	$n_{0,780}$
1.	282,43	160	18,3	1,0002915
2.	280,61	130,1	18,85	1,0002909
3.	231,16	130	19,8	1,0002909
4.	230,76	130	19,8	1,0002914
5.	231,36	130,5	19,5	1,0002915
6.	230,98	130	19,4	1,0002907
Mittel				1,0002911

1) Die Luft wurde dem Garten des Instituts entnommen und mit Phosphorpentoxyd getrocknet.

Tabelle XI.

 $\lambda = 5,896 \cdot 10^{-5}$  cm. Luft.  $l = 105,20$  cm.

Nr.	Druckänderung in mm Hg $0^\circ\text{ C.}$	Anzahl der Streifen	Temperatur des Rohres	$n_{0,760}$
1.	200,93	129	18,4	1,0002918
2.	201,13	129,2	18,4	1,0002922
3.	202,32	130	18,4	1,0002921
4.	201,13	129,2	18,4	1,0002922
5.	201,13	129,2	18,3	1,0002920
6.	200,93	129,2	18,3	1,0002923
Mittel				1,0002921

Aus der Bestimmung der Dispersion ergab sich die folgende Tabelle der Brechungsexponenten.

Tabelle XII.  
Dispersion der Luft.

	$\lambda$ in $10^{-5}$ cm	$n_{0,760}$
a)	6,677	1,0002911
b)	6,185	1,0002916
c)	5,896	1,0002922
d)	5,790	1,0002923
e)	5,461	1,0002929
f)	5,290	1,0002933

Man sieht, daß das Resultat der relativen Bestimmung dem der absoluten gleich ist und die ermittelte Dispersion innerhalb der Fehlergrenzen mit den besten bekannten Beobachtungen übereinstimmt.

Berechnet man nun für Äthylen und Äthan die Größe  $\Delta$ , so ergibt sie sich:

Für Äthylen:

aus a) und e) . . . . .	$\Delta = 3,07$
" b) " f) . . . . .	$\Delta = 2,88$
" c) " e) . . . . .	$\Delta = 3,11$
" a) " d) . . . . .	$\Delta = 3,40$
Mittel $\Delta = 3,10$	

## Für Äthan:

aus a) und f)	· · · · .	$\Delta = 1,69$
" b) "	· · · · .	$\Delta = 2,03$
" a) "	· · · · .	$\Delta = 2,30$
" c) "	· · · · .	$\Delta = 2,10$
		Mittel $\Delta = 2,03$

## Diskussion der Ergebnisse.

Wie in der Einleitung ausführlich dargelegt wurde, bietet die von Natanson abgeleitete Beziehung (1) ein sehr empfindliches Mittel, wichtige Fragen der Theorie an der Hand der Erfahrung zu entscheiden. Hierbei kommt in erster Linie die Frage nach der Berechtigung der Annahme monoelektronischer Konstitution für gasförmige Isolatoren in Betracht. Nur unter dieser speziellen Annahme gilt obige Beziehung, und zwar soll dann  $\Delta$  im ganzen betrachteten Spektralbezirk (mindestens wenn dieser weit von Absorptionsstreifen liegt) eine Konstante von der Größenordnung  $10^{-7} \text{ cm}^2$  sein. Es zeigt sich nun, daß im Falle des Acetylen, Methans, Äthylens und Äthans, die ebenso wie die Kohlensäure bekanntlich ultrarote Absorptionsbanden haben, die Größe  $\Delta$ , soweit es sich um das sichtbare Spektrum handelt, konstant bleibt.

Im betrachteten Spektralbezirk können daher die untersuchten Gase mit genügender Annäherung als monoelektronische Substanzen behandelt werden.

Dieser Umstand berechtigt uns, die weitere Frage, nach der Beziehung zwischen der Anzahl der „Dispersionselektronen“ pro Molekül und der Valenz aufzuwerfen. Versucht man jedoch die oben erwähnte provisorische Arbeitshypothese von Natanson auf die untersuchten gasförmigen Kohlenwasserstoffe anzuwenden, so überzeugt man sich gleich, daß die genannten Gase sich der „ $v\Delta$ -Regel“ nicht fügen.

Es ergibt sich nämlich:

für Methan ( $v = 8$ ) . . . . .	$v\Delta = 35,84$
„ Acetylen ( $v = 10$ ) . . . . .	$v\Delta = 40,50$
„ Äthylen ( $v = 12$ ) . . . . .	$v\Delta = 37,20$
„ Äthan ( $v = 14$ ) . . . . .	$v\Delta = 28,42$
anstatt etwa 16.	

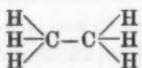
Ein anderer Weg, der nicht minder geeignet erscheint, etwas tiefer in das genannte Problem hineinblicken zu lassen,

eröffnet sich denen, die sich etwa J. J. Thomson anschließen und für sein Modell der elektronischen Struktur des Atoms entscheiden wollten.

Bekanntlich findet nach J. J. Thomson<sup>1)</sup> bei einer chemischen Vereinigung eine Übertragung von Elektronen (Korpuskeln) von einem Atom auf ein anderes statt, und es ist die Anziehung der positiven und der negativen Ladung, die dazu beiträgt, die Elemente in der Verbindung festzuhalten. Von der Anzahl Elektronen, sagt J. J. Thomson<sup>2)</sup>, die ein Atom unter dem Einfluß von Atomen anderer Elemente aufnehmen oder abgeben kann, hängt die Valenz jenes Atoms ab. Da diese „Valenzelektronen“ diejenigen sind, die am leichtesten bewegt werden können, so müssen sie den größten Einfluß auf den Brechungsexponenten ausüben.<sup>3)</sup>

Wollen wir von diesem Standpunkte aus die Resultate unserer Messungen der Dispersion gasförmiger Kohlenwasserstoffe betrachten, so finden wir die einfachsten Verhältnisse bei Methan vor. Berücksichtigt man nämlich den elektropositiven Charakter des Wasserstoffatoms<sup>4)</sup>, so muß man für Methan  $a = 4$  setzen; somit ist für dieses Gas  $a\Delta = 17,92$ .

Äthan wird durch die Formel



ausgedrückt. „Wenn wir annehmen“, sagt J. J. Thomson<sup>4)</sup>, „daß die Vereinigung der beiden Kohlenstoffatome miteinander von einer Übertragung eines Korpuskels von einem Atom auf das andere begleitet ist . . . , so würde das eine Kohlenstoffatom eine Ladung von vier Einheiten negativer Elektrizität, das andere dagegen eine Ladung von nur zwei Einheiten besitzen.“ Demnach müßte man  $a = 6$  setzen und bekäme  $a\Delta = 12,18$ . Eine ähnliche Betrachtung gibt

für Äthylen  $a = 4 \dots a\Delta = 12,40$ ;

für Acetylen  $a = 4 \dots a\Delta = 16,20$ .

1) J. J. Thomson, The Corpuscular Theory of Matter. London 1907.  
p. 127. sqq.

2) l. c. p. 138.

3) l. c. p. 156.

4) l. c. p. 131.

Stellt man die entsprechenden Zahlen, zu welchen einerseits die Natansonsche, andererseits die J. J. Thomsonsche Hypothese führt, nebeneinander,

	nach Natanson	nach J. J. Thomson
CH <sub>4</sub>	$v = 8 \dots v\Delta = 35,84$	$a = 4 \dots a\Delta = 17,92$
C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	$v = 14 \dots v\Delta = 28,42$	$a = 6 \dots a\Delta = 12,18$
C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	$v = 10 \dots v\Delta = 40,50$	$a = 4 \dots a\Delta = 16,20$
C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	$v = 12 \dots v\Delta = 37,20$	$a = 4 \dots a\Delta = 12,40$

so sieht man, daß sowohl die Werte von  $v\Delta$ , wie auch diejenigen von  $a\Delta$  um einen konstanten Wert herumschwanken. Dabei ist aber  $v\Delta$  ungefähr zweimal größer als der Mittelwert, den Natanson für andere Gase berechnet hat;  $a\Delta$  hingegen läßt sich wieder mit dem Werte, den man bei ähnlicher Betrachtungsweise z. B. für H<sub>2</sub> erhält

$$(a = 1 \dots a\Delta = \Delta = 7,94)^1)$$

nicht vereinbaren.

Faßt man daher die Ergebnisse zusammen, so muß man vorderhand konstatieren, daß die bisherigen Versuche der Theorie (wenigstens in ihren einfachsten Formen) die Beziehung zwischen den „Dispersions-“ und „Valenz“-Elektronen zu erfassen im Falle der Kohlenwasserstoffe *keine* Bestätigung in der Erfahrung gefunden haben. Es muß jedoch noch ein viel reicheres und exaktes Beobachtungsmaterial gesammelt werden, ehe man in dieser schwierigen und interessanten Frage zu einem sicheren Ergebnis gelangen dürfte.

Zum Schluß möchte ich die Gelegenheit benutzen, um Hrn. Prof. Dr. O. Lummer für sein äußerst freundliches Entgegenkommen und das rege Interesse, das er meinen Untersuchungen stets entgegenbringt, meinen tiefempfundenen Dank auszudrücken.

Breslau, Physik. Inst. d. k. Univ., Januar 1909.

1) W. Natanson, Bull. de l'Acad. des Sciences de Cracovie, April 1907. p. 349.

(Eingegangen 27. April 1909.)

9. Berichtigung zu der Mitteilung:  
*„Die Temperaturkoeffizienten der elektrischen  
Leitfähigkeit einiger Säuren und Basen  
in wässriger Lösung“;*  
von A. Wörmann.<sup>1)</sup>

Durch ein Versehen sind in den Tabb. 5—8 der obigen Mitteilung erste etwas fehlerhafte Berechnungen anstatt der endgültigen richtigen Zahlen angegeben; sie sind durch die folgenden zu ersetzen.

Tabelle 5.

	$c + c' t$	$c + c' t'$	$c$	$c'$
NaOH				
$\frac{1}{1}$ norm.	0,027546	0,028563	+0,02626	+0,0000712
$\frac{1}{2}$ "	0,027240	0,027916	0,02641	0,0000464
$\frac{3}{8}$ "	0,027600	0,028228	0,02680	0,0000443
$\frac{1}{4}$ "	0,027600	0,028267	0,02677	0,0000459
$\frac{1}{10}$ "	0,027630	0,028233	0,02686	0,0000425

Tabelle 6.

KOH				
$\frac{1}{1}$ norm.	0,026578	0,027059	0,02595	+0,0000846
$\frac{1}{2}$ "	0,026785	0,027362	0,02602	0,0000418
$\frac{3}{8}$ "	0,026829	0,027362	0,02613	0,0000383
$\frac{1}{4}$ "	0,027060	0,027496	0,02649	0,0000314
$\frac{1}{10}$ "	0,027497	0,028057	0,02676	0,0000403

1) A. Wörmann, Ann. d. Phys. 29. p. 194. 1909.

Tabelle 7.

	$c + c' t$	$c + c' t'$	$c$	$c'$
HCl				
$\frac{1}{1}$ norm.	0,022965	0,022530	+ 0,02330	- 0,0000241
$\frac{1}{2}$ "	0,023190	0,022807	0,02369	0,0000276
$\frac{3}{5}$ "	0,023361	0,022918	0,02393	0,0000318
$\frac{1}{4}$ "	0,023375	0,023048	0,02379	0,0000234
$\frac{1}{10}$ "	0,023579	0,023257	0,02400	0,0000284

Tabelle 8.

HNO <sub>3</sub>				
$\frac{1}{1}$ norm.	0,021593	0,021250	0,02205	- 0,0000252
$\frac{1}{2}$ "	0,022152	0,021831	0,02259	0,0000296
$\frac{1}{4}$ "	0,022752	0,022344	0,02330	0,0000300

Die Vergleichszahlen der Tab. 9 sind richtig bis auf die für KOH  $m = 1$ , die heißen müssen:

$$c \cdot 10^4 = 259,5, \quad c' \cdot 10^6 = 34,6$$

und für HNO<sub>3</sub>  $m = 1$ :

$$c' \cdot 10^6 = 25,2.$$

(Eingegangen 22. Mai 1909.)

